ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΥΠΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΠΡΟΤΙΜΗΣΕΩΝ ΧΡΗΣΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΥΛΛΟΓΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

Στρατάκης Μιλτιάδης

Μεταπτυχιακή Εργασία

Ηράκλειο, Ιούνιος 2005

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΥΠΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΠΡΟΤΙΜΗΣΕΩΝ ΧΡΗΣΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΥΛΛΟΓΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

Εργασία που υποβλήθηκε από τον

Στρατάκη Μιλτιάδη

ως μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων για την απόκτηση

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Συγγραφέας:

_____
Στρατάκης Μιλτιάδης
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Εισηγητική Επιτροπή:

_____
Βασίλης Χριστοφίδης, Αναπλ. Καθηγητής, Επόπτης

_____
Γρηγόρης Αντωνίου, Καθηγητής, Μέλος

_____
Γεώργιος Γεωργακόπουλος, Επικ. Καθηγητής, Μέλος

_____
Νικόλαος Σπυράτος, Καθηγητής, University of Paris-South, Μέλος

Δεκτή:

_____
Δημήτρης Πλεξουσάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής,
Πρόεδρος Επιτροπής Μεταπτυχιακών Σπουδών

Ηράκλειο, Ιούνιος 2005

ΤΥΠΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΠΡΟΤΙΜΗΣΕΩΝ ΧΡΗΣΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΥΛΛΟΓΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΩΝ

Στρατάκης Μιλτιάδης
Μεταπτυχιακή Εργασία
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περίληψη

Οι προτιμήσεις αποτελούν, πλέον, έναν από τους σημαντικότερους παράγοντες των σύγχρονων εφαρμογών του Παγκόσμιου Ιστού στο πλαίσιο της εξατομίκευσης της πληροφορίας, ανοίγοντας νέες κατευθύνσεις στην ανάκτηση πληροφοριών. Επιπροσθέτως, αποτελούν μια ικανοποιητική λύση για την ελεγχόμενη «χαλάρωση επερωτήσεων» (controlled query relaxation) του χρήστη, αντιμετωπίζοντας, έτσι, το πρόβλημα της «πληροφοριακής υπερφόρτωσης» (information overloading) που χαρακτηρίζει αρκετές από τις εφαρμογές αυτές.

Τα τελευταία χρόνια, πολλές ερευνητικές εργασίες έχουν παρατεθεί για την θεμελίωση των προτιμήσεων, οι οποίες διαχωρίζονται σε δύο κατηγορίες: (α) Τις ποιοτικές (qualitative) προσεγγίσεις, όπου οι προτιμήσεις αντιμετωπίζονται ως δυαδικές σχέσεις, και (β) Τις ποσοτικές (quantitative) προσεγγίσεις, όπου οι προτιμήσεις καθορίζονται μέσω αντίστοιχων συναρτήσεων βαθμολόγησης (scoring functions). Ωστόσο, καμία από αυτές δεν μπορεί να προσφέρει έναν γενικό τρόπο αναπαράστασης προτιμήσεων, καθώς και να περιγράψει επαρκώς τις πολύπλοκες εκφράσεις προτιμήσεων που παρατηρούνται στη καθημερινή ζωή.

Στην εργασία αυτή, προτείνουμε ένα τυπικό και γενικό μοντέλο αναπαράστασης προτιμήσεων για τη διάταξη συλλογών αντικειμένων, όπου τα χαρακτηριστικά που προσδιορίζουν τα αντικείμενα αντιμετωπίζονται ως μερικές συναρτήσεις (partial functions). Το μοντέλο αυτό είναι ανεξάρτητο από τα

συγκεκριμένα μοντέλα δεδομένων που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση των συλλογών αντικειμένων και παρέχει ένα ελάχιστο σύνολο εννοιών και κατασκευαστών προτιμήσεων για τη διάταξη των εκάστοτε διαθέσιμων αντικειμένων. Οι προτιμήσεις του μοντέλου μας αντιμετωπίζονται ως μερικές διατάξεις (partial orders), από τις οποίες κατασκευάζουμε ολικές διατάξεις (total orders) των αντικειμένων με τη χρήση κατάλληλων κλάσεων ισοδυναμίας. Τέλος, η δημιουργία μερικών διατάξεων μέσω προτιμήσεων μπορεί να γίνει τόσο στο επίπεδο των δεδομένων, όσο και στο επίπεδο των χαρακτηριστικών.

Επόπτης: Βασίλης Χριστοφίδης
Αναπληρωτής Καθηγητής

FORMAL MODEL FOR THE REPRESENTATION OF USER PREFERENCES REGARDING OBJECT COLLECTION ORDERINGS

Stratakis Miltiadis
Master's Thesis
Computer Science Department, University of Crete

Abstract

User preferences constitute one of the most significant factors on current applications via the Web in the scope of personalization, raising new challenges in the information retrieval. Moreover, they comprise a promising solution for the controlled user query relaxation, thereby coping with the problem of information overloading, which affects many of the Web based applications.

In the recent years, a lot of research effort has been made for the representation of user preferences in the software environment, which is distinguished in two categories: (a) The qualitative approaches, where preferences are considered as binary relations on sets, and (b) The quantitative approaches, where preferences are implicitly defined through corresponding scoring functions. However, none of the above approaches can represent user preferences in a generic way and, additionally to describe adequately the complex preference expressions that are stated in daily life.

This thesis proposes a formal and generic model for representing user preferences regarding object collection orderings, where the attributes that describe the available objects are encountered as partial functions. This model is independent of the specific data models that represent the object collections. Moreover, it provides a minimal set of concepts and preference constructors for the ordering of the available objects. The user preferences in our model are defined as partial orders, from which we construct total orders of the objects with

the use of appropriate equivalence classes. Finally, the construction of partial orders through stated user preferences may take place either in the level of data, as well as in the level of attributes.

Supervisor: Vassilis Christophides
Associate Professor

Στους αγαπημένους μου γονείς,

Μανώλη και Εύα,

και στον αδερφό μου Νίκο

Ευχαριστίες

Κατ' αρχήν, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμότατα τον επόπτη μου, κ. Βασίλη Χριστοφίδη, για τη χρήσιμη καθοδήγηση και την πολύτιμη βοήθεια μου που παρείχε. Η υπομονή, η κατανόηση και το απαράμιλλο ενδιαφέρον που έδειξε στα 2,5 χρόνια της συνεργασίας μας ήταν σημαντικοί παράγοντες για την εκπόνηση και ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής μου εργασίας.

Επίσης, ευχαριστώ ιδιαίτερα τον καθηγητή κ. Νικόλαο Σπυράτο για την αμέριστη προσφορά του στην εργασία αυτή, καθώς και για την προθυμία του, αν και μόνιμος κάτοικος εξωτερικού, να παραστεί στην παρουσίασή της ως μέλος της εξεταστικής επιτροπής. Ομοίως, δεν θα έπρεπε να παραλείψω τις ευχαριστίες μου και στα υπόλοιπα δύο μέλη της εξεταστικής επιτροπής, κ. Γρηγόρη Αντωνίου και κ. Γεώργιο Γεωργακόπουλο, για τις ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις τους.

Ακόμη, ευχαριστώ το Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Κρήτης, καθώς και την ομάδα του εργαστηρίου των Πληροφοριακών Συστημάτων του Ινστιτούτου Πληροφορικής – Ι.Τ.Ε. για τη βοήθεια και την απαραίτητη γνωστική κατάρτιση που μου προσέφεραν.

Ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ ανήκει στους φίλους μου για την καλή παρέα, αλλά κυρίως τη συμπαράσταση που μου έδωσαν κατά τη διάρκεια της μεταπτυχιακής μου εργασίας. Ιδιαίτερες ευχαριστίες στους Νίκο Δρακόπουλο, Γιώργο Κώτση, Αντώνη Μισαργόπουλο, Γιώργο Παγώνη, Γιώργο Παναγιωτάκη, Ηλία Σταυράκη, Άλκη Συμεωνίδη και Γιώργο Φωτιάδη για τη φιλία τους από το 1^{ο} έτος των σπουδών μου στο πανεπιστήμιο, καθώς και στην «ομάδα των λευκών κτηρίων», αποτελούμενη από τους Βάσω Αλεβίζου, Αντώνη Κουκουρίκο, Νίκο Ξανθόπουλο και λοιπούς, με τους οποίους και περάσαμε ατέλειωτες ώρες δουλειάς, αλλά και ευχάριστες στιγμές διασκέδασης (απολαμβάνοντας μερικές φορές και τη συντροφιά ενός Johnny).

Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω ειλικρινά τη Σύνθια Συκινιώτη που με την απόλυτη στήριξή της έπαιξε πολύ σημαντικό ρόλο για να μπορέσω να φέρω εις πέρας την εργασία αυτή.

Τελειώνοντας, το μεγαλύτερο ευχαριστώ ανήκει στους γονείς μου, Μανώλη και Εύα, καθώς και στον αδερφό μου Νίκο, όπου με την απεριόριστη κατανόηση και στήριξή τους όλο αυτόν τον καιρό, με βοήθησαν πραγματικά στο να αντεπεξέλθω επιτυχώς στις απαιτητικές προσδοκίες μιας τέτοιας εργασίας.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1 1
Εισαγωγή 1
1.1 Κίνητρα 1
1.2 Προτιμήσεις 4
1.3 Συνεισφορά της Εργασίας μας 7
1.4 Οργάνωση της Αναφοράς 10
Κεφάλαιο 2 11
Εισαγωγή στη Θεωρία των Διατάξεων 11
2.1 Μερικές Διατάξεις (Partial Orders) 11
2.1.1 Ομοιομορφισμός Μερικώς Διατεταγμένων Συνόλων 16
2.1.2 Κατασκευή Νέων Μερικών Διατάξεων - Τελεστές 20
2.2 Αυστηρές Μερικές Διατάξεις (Strict Partial Orders) 33
2.3 Σχέσεις Ισοδυναμίας (Equivalence Relations) 38
2.4 Προδιατάξεις (Preorders) 38
2.5 Σύνοψη 44
Κεφάλαιο 3 46
Προτιμήσεις και Διάταξη Αντικειμένων 46
3.1 Το Συναρτησιακό Πλαίσιο 46
3.1.1 Συναρτησιακή Άλγεβρα 48
3.1.2 Αντιστροφή Συνάρτησης 56
3.2 Βασικοί Ορισμοί Προτιμήσεων 59
3.2.1 Γενικός Ορισμός Προτιμήσεων 60
3.2.2 Διάταξη Αντικειμένων Μέσω Προτιμήσεων 62
3.2.2.1 Από τη Δηλωμένη Προτίμηση στη Διάταξη των Αντικειμένων 62
3.2.2.2 Από τη Μερική στην Ολική Διάταξη των Αντικειμένων 71
3.2.3 Κατασκευή της Διάταξης που χαρακτηρίζει την Δηλωμένη Προτίμηση του Χρήστη 102
3.3 Συμπεράσματα 112
Κεφάλαιο 4 113
Επισκόπηση Σχετικών Προσεγγίσεων 113
4.1 Ποιοτικές Προσεγγίσεις 113
4.1.1 Πλαίσιο Προτιμήσεων κατά Chomicki 114
4.1.1.1 Σύνθεση Σχέσεων Προτίμησης 120
4.1.1.1.1 Μονοδιάστατη Σύνθεση 120
4.1.1.1.2 Πολυδιάστατη Σύνθεση 127
4.1.1.1.3 Ιδιότητες Ειδών Σύνθεσης 135
4.1.1.1.4 Διατήρηση της Αυστηρής Μερικής Διάταξης 136
4.1.1.2 Καθορισμός Καλύτερων Πλειάδων 138
4.1.1.3 Κατάταξη (Ranking) Πλειάδων 140
4.1.1.4 Αδυναμίες της Προσέγγισης 143
4.1.2 Πλαίσιο Προτιμήσεων κατά Kießling 145
4.1.2.1 Κατασκευές Προτιμήσεων 152
4.1.2.1.1 Βασικές Προτιμήσεις 153
4.1.2.1.1.1 Βασικές Μη-Αριθμητικές Προτιμήσεις 154
4.1.2.1.1.2 Βασικές Αριθμητικές Προτιμήσεις 160
4.1.2.1.2 Σύνθετες Προτιμήσεις 168
4.1.2.1.2.1 Σύνθετες Προτιμήσεις με Συσσώρευση 168

4.1.2.1.2.2 Σύνθετες Προτιμήσεις με Συνάθροιση 175
4.1.2.1.3 Ιεραρχία των Κατασκευαστών Προτίμησης 180
4.1.2.1.4 Ιδιότητες των Κατασκευαστών Σύνθετων Προτιμήσεων 181
4.1.2.2 Επερωτήσεις Μέσω Προτιμήσεων 185
4.1.2.3 Αδυναμίες της Προσέγγισης 187
Κεφάλαιο 5 190
Προτιμήσεις στο RDF Μοντέλο Δεδομένων 190
5.1 RDF (Resource Description Framework) 190
5.2 Αναπαράσταση RDF Μοντέλου Μέσω Συναρτήσεων 198
5.2.1 Ιδιότητες/Γνωρίσματα Πόρων 198
5.2.2 Ιδιότητες/Συσχετίσεις Πόρων 205
5.2.3 Κατηγοριοποίηση των Πόρων 216
Κεφάλαιο 6 226
Επίλογος και Μελλοντική Εργασία 226
Βιβλιογραφία 229

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1.1 - Το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PLANETS* 2
Εικόνα 2.1 - Το διάγραμμα Hasse του A 14
Εικόνα 2.2 - Τα διαγράμματα Hasse των A και A' 18
Εικόνα 2.3 - Τα διαγράμματα Hasse των B και B^{∂} 21
Εικόνα 2.4 - Τα διαγράμματα Hasse των C, D και $C \times D$ με διάταξη μέσω συντεταγμένων και λεξικογραφική διάταξη 23
Εικόνα 2.5 - Τα διαγράμματα Hasse των E, F, $E \bigcup F$ και $E \oplus F$ 25
Εικόνα 2.6 - Το διάγραμμα Hasse του G (μέσω της $\leq_G$) 32
Εικόνα 2.7 - Το διάγραμμα Hasse του U_G μέσω της $\leq_{MaxU_G}$ 32
Εικόνα 2.8 - Το διάγραμμα Hasse του U_G μέσω της $\leq_{MinU_G}$ 33
Εικόνα 2.9 - Η προδιάταξη $\preceq_H$ του H ως κατευθυνόμενος γράφος 43
Εικόνα 2.10 - Το διάγραμμα Hasse του $Q_H = H / \cong_H$ (μέσω της $\leq_{Q_H}$) 44
Εικόνα 3.1 - Η συναρτησιακή προβολή $\pi_{B_1} : A_1 \times A_2 \to A_1$, όπου $B_1 = A_1$ 49
Εικόνα 3.2 - Η συναρτησιακή προβολή $\pi_{B_2} : A_1 \times A_2 \to A_2$, όπου $B_2 = A_2$ 49
Εικόνα 3.3 - Η συναρτησιακή προβολή $\pi_{B_3} : A_1 \times A_2 \to A_1 \times A_2$, όπου $B_3 = \{A_1, A_2\}$ 50
Εικόνα 3.4 - Οι συναρτήσεις f, g και $g \circ f$ του Παραδείγματος 3.2 51
Εικόνα 3.5 - Οι συναρτήσεις f και g του Παραδείγματος 3.3 53
Εικόνα 3.6 - Η συνάρτηση $f \wedge g$ του Παραδείγματος 3.3 53
Εικόνα 3.7 - Ο περιορισμός της $f \wedge g$ πάνω στις f και g μέσω των προβολών π_Y και π_Z 54
Εικόνα 3.8 - Η συνάρτηση f του Παραδείγματος 3.4 55
Εικόνα 3.9 - Η συνάρτηση $f /_S$ του Παραδείγματος 3.4 56
Εικόνα 3.10 - Η συνάρτηση f του Παραδείγματος 3.5 57
Εικόνα 3.11 - Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της συνάρτησης f του Παραδείγματος 3.5 58
Εικόνα 3.12 - Οι συναρτήσεις f_1 και f_2 65
Εικόνα 3.13 - Το διάγραμμα Hasse του Y_2 μέσω της $\leq_{P_1}$ 66
Εικόνα 3.14 - Το διάγραμμα Hasse του $X / \approx_X$ του Παραδείγματος 3.6 μέσω της $\leq_{X/\approx_X}$ 67
Εικόνα 3.15 - Το διάγραμμα Hasse του $Y_1 \times Y_2$ μέσω της $\leq_{P_2}$ 68
Εικόνα 3.16 - Η συνάρτηση $f_1 \wedge f_2$ 69
Εικόνα 3.17 - Το διάγραμμα Hasse του $X / \approx_X$ του Παραδείγματος 3.7 μέσω της $\leq_{X/\approx_X}$ 70
Εικόνα 3.18 - Ο αλγόριθμος *TOWMax* 74
Εικόνα 3.19 - Ο αλγόριθμος *TOWMin* 75
Εικόνα 3.20 - Το διάγραμμα Hasse του T μέσω της $\leq_{MaxU_{X/\approx_X}}$ 82
Εικόνα 3.21 - Το διάγραμμα Hasse του V μέσω της $\leq_{MinU_{X/\approx_X}}$ 83

Εικόνα 3.22 - Ο αλγόριθμος *FinTO* 94
Εικόνα 3.23 - Το διάγραμμα Hasse του $F = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ μέσω της $\leq_F$ (*FlagMaxMin* =0) 97
Εικόνα 3.24 - Το διάγραμμα Hasse του $F = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ μέσω της $\leq_F$ (*FlagMaxMin* =1) 97
Εικόνα 3.25 - Το διάγραμμα Hasse του $Monitors = \{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ μέσω της $\leq_O$ (*FlagMaxMin* =0) 101
Εικόνα 3.26 - Το διάγραμμα Hasse του $Monitors = \{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ μέσω της $\leq_O$ (*FlagMaxMin* =1) 102
Εικόνα 3.27 - Το διάγραμμα Hasse του $S = \{f_1, ..., f_4\}$ μέσω της $\leq_{P_3^S}$ 105
Εικόνα 3.28 - Το διάγραμμα Hasse του $F^S = \{\{f_1\}, \{f_2, f_3\}, \{f_4\}\}$ μέσω της $\leq_F$ (περίπτωση επιλογής *TOWMax*) 106
Εικόνα 3.29 - Το διάγραμμα Hasse του $F^S = \{\{f_1\}, \{f_2\}, \{f_3, f_4\}\}$ μέσω της $\leq_F$ (περίπτωση επιλογής *TOWMin*) 106
Εικόνα 3.30 - Το διάγραμμα Hasse του $Y_1 \times \cdots \times Y_4$ μέσω της $\leq_{P_3}$ (για $F^S = \{\{f_1\}, \{f_2, f_3\}, \{f_4\}\}$) 110
Εικόνα 3.31 - Το διάγραμμα Hasse του $Y_1 \times \cdots \times Y_4$ μέσω της $\leq_{P_3}$ (για $F^S = \{\{f_1\}, \{f_2\}, \{f_3, f_4\}\}$) 111
Εικόνα 4.1 - Το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PCGames* 114
Εικόνα 4.2 - Το διάγραμμα Hasse του T (μέσω της $\succ_{C_1}$) 118
Εικόνα 4.3 - Το διάγραμμα Hasse του T (μέσω της $\succ_{C_2}$) 119
Εικόνα 4.4 - Το διάγραμμα Hasse του T (μέσω της $\succ_{C_3}$) 120
Εικόνα 4.5 - Τα διαγράμματα Hasse του T μέσω των $\succ_{C_4}$, $\succ_{C_5}$ και $\succ_{C_6} = \succ_{C_4} \cup \succ_{C_5}$ 122
Εικόνα 4.6 - Τα διαγράμματα Hasse του T μέσω των $\succ_{C_8}$, $\succ_{C_9}$ και $\succ_{C_{10}} = \succ_{C_8} \cap \succ_{C_9}$ 124
Εικόνα 4.7 - Το διάγραμμα Hasse του T (μέσω της $\succ_{C_{11}} = \succ_{C_1} - \succ_{C_8}$) 125
Εικόνα 4.8 - Το διάγραμμα Hasse του T (μέσω της $\succ_{C_{12}} = \succ_{C_8} \triangleright \succ_{C_9}$) 127
Εικόνα 4.9 - Το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *TableGames* 129
Εικόνα 4.10 - Το διάγραμμα Hasse του U (μέσω της $\succ_{C_{13}}$) 130
Εικόνα 4.11 - Το διάγραμμα Hasse του $T \times U$ (μέσω της $\succ_{C_{14}} = P(\succ_{C_8}, \succ_{C_{13}})$) 131
Εικόνα 4.12 - Το διάγραμμα Hasse του $T \times U$ (μέσω της $\succ_{C_{15}} = L(\succ_{C_8}, \succ_{C_{13}})$) 134
Εικόνα 4.13 - Το αποτέλεσμα της επερώτησης $\omega^1_{C_{10}}(\Sigma)$ 142
Εικόνα 4.14 - Το αποτέλεσμα της επερώτησης $\omega^2_{C_{10}}(\Sigma)$ 143
Εικόνα 4.15 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_1 = (G, <_{P_1})$ 148
Εικόνα 4.16 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_1^\delta = (G, <_{P_1^\delta})$ 149
Εικόνα 4.17 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_2 = (Category, <_{P_2})$ 151
Εικόνα 4.18 - Ο "καλύτερος-από" γράφος της $P_2^\Sigma = (\Sigma[Category], <_{P_2})$ 152
Εικόνα 4.19 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_3^\Sigma = (\Sigma[Category], <_{P_3})$ 155

Εικόνα 4.20 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_4^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_4})$ 156
Εικόνα 4.21 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_5^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_5})$ 157
Εικόνα 4.22 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_6^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_6})$ 158
Εικόνα 4.23 - Ο "καλύτερο-από" γράφος $E - graph_{P_7}$ 159
Εικόνα 4.24 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_7^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_7})$ 160
Εικόνα 4.25 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_8^{\Sigma} = (\Sigma[\Pr ice - in_Euro], <_{P_8})$ 162
Εικόνα 4.26 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_9^{\Sigma} = (\Sigma[\Pr ice - in_Euro], <_{P_9})$ 164
Εικόνα 4.27 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{10}^{\Sigma} = (\Sigma[Year], <_{P_{10}})$ 165
Εικόνα 4.28 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{11}^{\Sigma} = (\Sigma[Year], <_{P_{11}})$ 166
Εικόνα 4.29 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{12}^{\Sigma} = (\Sigma[Year], <_{P_{12}})$ 168
Εικόνα 4.30 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{13}^{\Sigma} = (\Sigma[\{Year, \Pr ice - in - Euro\}], <_{P_{13}})$ 170
Εικόνα 4.31 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{14}^{\Sigma} = (\Sigma[\{Year, \Pr ice - in - Euro\}], <_{P_{14}})$ 172
Εικόνα 4.32 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{16}^{\Sigma} = (\Sigma[\{Year, \Pr ice - in - Euro\}], <_{P_{16}})$ 174
Εικόνα 4.33 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{17}^{\Sigma} = (\Sigma[\Pr ice - in - Euro], <_{P_{17}})$ 176
Εικόνα 4.34 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{20}^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_{20}})$ 178
Εικόνα 4.35 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{23}^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_{23}})$ 180
Εικόνα 4.36 - Η ιεραρχία των κατασκευαστών προτίμησης του Kießling..... 181
Εικόνα 4.37 - Το αποτέλεσμα της επερώτησης $\sigma[P_{13}](\Sigma)$ 186
Εικόνα 5.1 - Ένα ενδεικτικό RDF Σχήμα..... 193
Εικόνα 5.2 - Ένα έγκυρο RDF στιγμιότυπο του RDF Σχήματος της Εικόνας 5.1 196
Εικόνα 5.3 - Η απεικόνιση της $f_{creation-year} : X \to N_1$ για το στιγμιότυπο της Εικόνας 5.2..... 199
Εικόνα 5.4 - Η απεικόνιση της $f_{price-in-Euros} : X \to N_2$ για το στιγμιότυπο της Εικόνας 5.2..... 201
Εικόνα 5.5 - Το συναρτησιακό ταίριασμα $f_{creation-year} \wedge f_{price-in-Euros}$ 202
Εικόνα 5.6 - Το διάγραμμα Hasse του $X / \approx_X$ μέσω της $\leq_{X/\approx_X}$ για το Παράδειγμα 5.1 204
Εικόνα 5.7 - Το διάγραμμα Hasse του *Monitors* μέσω της $\leq_O$ για το Παράδειγμα 5.1 205
Εικόνα 5.8 - Η σχηματική απεικόνιση των συναρτήσεων $s_{exhibited}$ και $t_{exhibited}$ 208
Εικόνα 5.9 - Η σχηματική απεικόνιση των συναρτήσεων $s_{paints,exhibited}$ και $t_{paints,exhibited}$ 210
Εικόνα 5.10 - Η συνάρτηση $f_1 = s_{paints} \circ s_{paints,exhibited} : I_{paints,exhibited} \to D_{paints}$ 212
Εικόνα 5.11 - Η συνάρτηση $f_2 = f_{location-country} \circ (t_{exhibited} \circ t_{paints,exhibited}) : I_{paints,exhibited} \to \Sigma$ 213
Εικόνα 5.12 - Το συναρτησιακό ταίριασμα των f_1 και f_2 του Παραδείγματος 5.2 214

Εικόνα 5.13 - Το διάγραμμα Hasse του $I_{pa\,\mathrm{int}\,s,exhibited} / \approx_{I_{pa\,\mathrm{int}\,s,exhibited}}$ μέσω της $\leq_{I_{pa\,\mathrm{int}\,s,exhibited} / \approx_{I_{pa\,\mathrm{int}\,s,exhibited}}}$ για το Παράδειγμα 5.2 215
Εικόνα 5.14 - Το διάγραμμα Hasse του *Monitors* μέσω της $\leq_O$ για το Παράδειγμα 5.2 216
Εικόνα 5.15 - Η κατηγοριοποίηση των πόρων/κόμβων του RDF στιγμιότυπου της Εικόνας 5.2 στις κλάσεις του RDF Σχήματος της Εικόνας 5.1 μέσω της *typeOf* ιδιότητας 217
Εικόνα 5.16 - Οι συναρτήσεις $classOfLink : CLinks_{D,S} \rightarrow Classes$ και $resourceOfLink : CLinks_{D,S} \rightarrow \mathrm{Re}\,sources$ 220
Εικόνα 5.17 - Η σχηματική αναπαράσταση της $f_3 : T \rightarrow Classes$, όπου $f_3 = classOfLink /_T$ 222
Εικόνα 5.18 - Το διάγραμμα Hasse του συνόλου *Classes* μέσω της $\leq_{P_6}$ 222
Εικόνα 5.19 - Το διάγραμμα Hasse του $T / \approx_T$ μέσω της $\leq_{T/\approx_T}$ για το Παράδειγμα 5.3 223
Εικόνα 5.20 - Το διάγραμμα Hasse του *Monitors* μέσω της $\leq_O$ για το Παράδειγμα 5.3 (επιλογή *TOWMax*) 224
Εικόνα 5.21 - Το διάγραμμα Hasse του *Monitors* μέσω της $\leq_O$ για το Παράδειγμα 5.3 (επιλογή *TOWMin*) 225

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 4.1 - Ιδιότητες των ειδών σύνθεσης του Chomicki 136
Πίνακας 4.2 - Διατήρηση της αυστηρής μερικής διάταξης στα είδη σύνθεσης του Chomicki 137
Πίνακας 4.3 - Οι ιδιότητες των κατασκευαστών σύνθετων προτιμήσεων του Kießling 184

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Είναι κοινώς αποδεκτό το γεγονός ότι οι προτιμήσεις ενυπάρχουν σε σχεδόν όλες τις ενέργειες που σχετίζονται με την καθημερινή και την επαγγελματική μας ζωή. Τα τελευταία χρόνια, οι προτιμήσεις απασχολούν όλο και περισσότερο τις ραγδαία αναπτυσσόμενες εφαρμογές λογισμικού για τον Παγκόσμιο Ιστό, ανοίγοντας, έτσι, νέες κατευθύνσεις στην ανάκτηση πληροφοριών. Έτσι, ένας κρίσιμος παράγοντας για αυτές τις εφαρμογές είναι το κατά πόσο θα μπορούν να ανταποκριθούν με επιτυχία στις ποικίλες και, συνήθως, πολύπλοκες ανάγκες ανάκτησης πληροφοριών, λαμβάνοντας υπόψη τις προτιμήσεις ενός χρήστη ή μιας ομάδας χρηστών.

1.1 Κίνητρα

Γενικά, η εξατομίκευση πληροφοριών χαρακτηρίζεται από δύο διαφορετικές όψεις. Η μια είναι ο «ιδεατός κόσμος» (exact world), όπου οι επιλογές του χρήστη μπορούν να ικανοποιηθούν πλήρως ή καθόλου. Σ' αυτό το περιβάλλον, οι εκάστοτε επερωτήσεις (queries) θεωρούνται ως επερωτήσεις τέλειου ταιριάσματος (exact-match queries), οι οποίες και δηλώνουν αυστηρά κριτήρια επιλογής (hard selection constraints) που πρέπει να ικανοποιούνται υποχρεωτικά. Η άλλη όψη είναι ο «πραγματικός κόσμος» (real world), στον οποίο οι επιλογές του χρήστη αντιμετωπίζονται ως ευχές/επιθυμίες (wishes). Οι επιλογές αυτές δεν ικανοποιούνται κάθε φορά, επομένως οι αντίστοιχες επερωτήσεις αντιμετωπίζονται ως μέσα για την επιστροφή των *καλύτερων δυνατών* απαντήσεων που προσεγγίζουν τις επιθυμίες των χρηστών, χρησιμοποιώντας επιεικά κριτήρια επιλογής (soft selection constraints) αντί για αυστηρά.

Ας θεωρήσουμε το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PLANETS* που παρουσιάζεται στην Εικόνα 1.1, όπου για τα πεδία (domains) των γνωρισμάτων *Id*, *Size*, *Distance-from-Sun* και *Moon* ισχύει ότι *dom(Id)* = Σ,

όπου Σ το σύνολο όλων των αλφαριθμητικών, *dom(Size)* = {“Small”, “Medium”, “Large”}, *dom(Distance-from-Sun)* = {“Near”, “Far”} και *dom(Moon)* = {“Yes”, “No”}.

Id	Size	Distance-from-Sun	Moon
Mercury	Small	Near	No
Venus	Small	Near	No
Earth	Small	Near	Yes
Mars	Small	Near	Yes
Jupiter	Large	Far	Yes
Saturn	Large	Far	Yes
Uranus	Medium	Far	Yes
Neptune	Medium	Far	Yes
Pluto	Large	Far	Yes

Εικόνα 1.1 - Το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PLANETS*

Έστω, τώρα, ότι ένας χρήστης δηλώνει την παρακάτω επερώτηση αυστηρής επιλογής: «Οι πλανήτες που με ενδιαφέρουν *πρέπει* να είναι μικροί στο μέγεθος και *πρέπει* να είναι μακριά από τον Ήλιο». Διαισθητικά, η επερώτηση αυτή, έστω q_1, μπορεί να θεωρηθεί ως η σύζευξη ($\wedge$) των (αυστηρών) κριτηρίων *Size* = “Small” και *Distance-from-Sun* = “Far”:

$$q_1 := (Size = \text{“Small”}) \wedge (Distance\text{-}from\text{-}Sun = \text{“Far”})$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η $1^η$, $2^η$, $3^η$ και $4^η$ πλειάδα του πίνακα ικανοποιούν το κριτήριο *Size* = “Small”, καθώς και οι εναπομείναντες πλειάδες ικανοποιούν το κριτήριο *Distance-from-Sun* = “Far”, όποτε το σύνολο των πλειάδων που ικανοποιούν την q_1 είναι το κενό σύνολο, δηλαδή ουσιαστικά δεν επιστρέφεται *καμία* απάντηση στο χρήστη. Το φαινόμενο της επιστροφής κενών απαντήσεων στο χρήστη είναι αρκετά σύνηθες σε πολλές υπάρχουσες εφαρμογές του Παγκόσμιου Ιστού που παρέχουν εξατομικευμένες (personalized) λειτουργίες εύρεσης και επερωτήσεων, εφόσον οι τεχνολογίες (π.χ., SQL, XML, μοντελοποίηση E/R) που χρησιμοποιούνται σε αυτές αντιμετωπίζουν *μόνο το παράδειγμα του «ιδεατού κόσμου»*. Αυτό το

σημαντικό μειονέκτημα μπορεί να είναι αρκετά επιζήμιο για την αποδοχή των παραπάνω εφαρμογών από το αγοραστικό κοινό, εφόσον η συνεχής επιστροφή κενών απαντήσεων καταλήγει να είναι αρκετά απογοητευτική για τον εκάστοτε χρήστη.

Για την αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος, μια λύση είναι η «χαλάρωση» με κάποιον τρόπο των επερωτήσεων που δηλώνονται από το χρήστη. Η πράξη αυτή, η οποία και ονομάζεται «χαλάρωση επερώτησης» (query relaxation), μπορεί να επιτελεστεί με ποικίλους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι και η μετατροπή των συζεύξεων των κριτηρίων που χαρακτηρίζουν μια επερώτηση σε διαζεύξεις ($\vee$), μετατρέποντας έτσι τα κριτήρια αυτά από αυστηρά σε επιεική. Για να γίνουμε πιο σαφείς, ας θεωρήσουμε ξανά το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PLANETS* στην Εικόνα 1.1. Εφόσον η επερώτηση q_1 δεν επιστρέφει κάποια απάντηση, την «χαλαρώνουμε» μέσω μιας αντίστοιχης επερώτησης q_2, η οποία και συνδέει τα (επιεική, πλέον) κριτήρια *Size* = “Small” και *Distance-from-Sun* = “Far” με διάζευξη:

$$q_2 := (\textit{Size} = \text{“Small”}) \vee (\textit{Distance-from-Sun} = \text{“Far”})$$

Μέσω της παραπάνω «χαλάρωσης», είναι σίγουρο ότι θα επιστραφεί τουλάχιστον μια απάντηση στο χρήστη, φέρνοντας εις πέρας το πρόβλημα της κενής απάντησης. Ωστόσο, βρισκόμαστε ξανά σε ανεπιθύμητη κατάσταση. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, οι απαντήσεις που επιστρέφει η q_2 απαρτίζουν *ολόκληρο το στιγμιότυπο του πίνακα*, οπότε υπάρχει περίπτωση πολλές από αυτές να μην σχετίζονται με αυτό που θα ήθελε ο χρήστης. Αυτού του είδους το μειονέκτημα είναι γνωστό ως «πληροφοριακή υπερφόρτωση» (information overloading) και επηρεάζει πιο πολύ εφαρμογές που σχετίζονται με τεράστιες αποθήκες πληροφορίας, όπως, π.χ., είναι οι μηχανές αναζήτησης στο Internet που η βάση τους ξεπερνάει, πλέον, τα 4,000,000,000 ηλεκτρονικών σελίδων, οδηγώντας, έτσι, σε αποτελέσματα επερωτήσεων με μεγάλο όγκο από άσχετη πληροφορία.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η ιδανική λύση για την αποφυγή των προβλημάτων της κενής απάντησης και της υπερχείλισης πληροφορίας είναι *η παροχή μιας ελεγχόμενης «χαλάρωσης» επερωτήσεων μέσω μιας*

σύνθετης χρήσης αυστηρών και επιεικών κριτηρίων επιλογής, όπου τα αυστηρά κριτήρια αποτελούν το μέσο για το φιλτράρισμα της πληροφορίας και τα επιεική κριτήρια το μέσο για *τη διάταξη της διαθέσιμης πληροφορίας*, ύστερα από το εκάστοτε φιλτράρισμα. Ένας προφανής τρόπος για την παραπάνω διάταξη, είναι *η εισαγωγή προτιμήσεων από το χρήστη*.

1.2 Προτιμήσεις

Όπως ξέρουμε, οι προτιμήσεις αποτελούν έναν κύριο παράγοντα στις επιλογές μας σε όλους τους τομείς της καθημερινής μας ζωής. Κάθε μέρα αντιμετωπίζουμε καταστάσεις, από μικρής σημασίας έως πιο σημαντικές, στην οποία καλούμαστε να διαλέξουμε με βάση την προτίμηση που δείχνουμε πάνω σε ένα σύνολο από διαθέσιμες επιλογές. Π.χ., εάν κάποιος άνδρας που ετοιμάζεται να πάει στη δουλειά του έχει στην ντουλάπα του δύο κόκκινες, τρεις γκρι, δύο κίτρινες και τέσσερις μπλε γραβάτες και προτιμά εκείνη την στιγμή να φορέσει μια κόκκινη γραβάτα, τότε επιλέγει μια εκ των δύο κόκκινων γραβατών. Επίσης, ένας χρήστης που παραγγέλνει ένα αυτοκίνητο μέσω ηλεκτρονικής σελίδας στο διαδίκτυο, η οποία παρέχει αυτοκίνητα από διάφορες μάρκες, και ο χρήστης αυτός προτιμά αυτοκίνητα μάρκας Ford, τότε θέτει την τιμή «Ford» στο πεδίο που αντιστοιχεί στην επιθυμητή μάρκα αυτοκινήτου και επιλέγει ένα από τα διαθέσιμα αποτελέσματα αυτοκινήτων που του παρουσιάζονται.

Οι εκάστοτε προτιμήσεις που δηλώνονται πάνω σε συλλογές αντικειμένων *σχετίζονται άμεσα* με τα *χαρακτηριστικά* των αντικειμένων αυτών. Όπως είδαμε προηγουμένως, η προτίμηση πάνω στις γραβάτες έγινε με βάση το χρώμα τους και στα αυτοκίνητα με βάση τη μάρκα τους. Λόγω του αρκετά εκτεταμένου φάσματος από εκφράσεις προτιμήσεων στην καθημερινή ζωή, ο αριθμός αλλά και η φύση των χαρακτηριστικών αυτών για μια δηλωμένη προτίμηση πάνω σε μια συγκεκριμένη συλλογή αντικειμένων *μπορεί να ποικίλλει*. Π.χ., έστω ότι στο παράδειγμα των γραβατών, οι γραβάτες, εκτός από το χρώμα τους, χαρακτηρίζονται και από τον τύπο τους (κανονική, ριγέ, πουά, κ.ά.). Οπότε, ο άνδρας, εκτός από προτιμήσεις που εμπλέκουν μόνο το χρώμα (όπως η παραπάνω), μπορεί να δηλώσει

προτιμήσεις που εμπλέκουν μόνο τον τύπο των γραβατών (π.χ., να προτιμήσει να φορέσει ριγέ γραβάτα), καθώς και προτιμήσεις που εμπλέκουν και τα δύο χαρακτηριστικά (π.χ., να προτιμήσει να φορέσει μπλε, κανονική γραβάτα). Ανεξάρτητα, όμως, από τον εκάστοτε αριθμό και τη φύση των χαρακτηριστικών που εμπλέκονται, μια προτίμηση ενός χρήστη μπορεί να εκφραστεί με *δύο πιθανούς τρόπους:*

a) Ο *άμεσος* τρόπος: Ο χρήστης δηλώνει την επιθυμία του κατευθείαν σε *όλη* τη διαθέσιμη πληροφορία των εμπλεκόμενων χαρακτηριστικών που προσδιορίζουν τα διαθέσιμα αντικείμενα, και
b) Ο *έμμεσος* τρόπος: Ο χρήστης δηλώνει την επιθυμία του μεταξύ των τιμών κάθε εμπλεκόμενου χαρακτηριστικού *χωριστά*, καθώς επίσης και *μεταξύ των χαρακτηριστικών αυτών*.

Με βάση τα παραδείγματα της καθημερινής ζωής, ο έμμεσος τρόπος αποτελεί *πληρέστερη* προσέγγιση της έκφρασης προτιμήσεων σε σχέση με τον άμεσο. Π.χ., ένας άνθρωπος που θέλει να αγοράσει ένα αυτοκίνητο, συνήθως εκφράζει την προτίμησή του σε κάθε χαρακτηριστικό *χωριστά* (π.χ., ποιές μάρκες αυτοκινήτων επιθυμεί, πόσα λεφτά περίπου πρέπει να κάνει, αν θέλει να παίρνει αμόλυβδη βενζίνη ή όχι, ποιές χρονιές έκδοσης τον ενδιαφέρουν πιο πολύ, κτλ.) και μεταξύ των χαρακτηριστικών αυτών, ποια θεωρεί ως πιο σημαντικά και ποια λιγότερο σημαντικά έως αδιάφορα (π.χ., να θεωρεί την τιμή του αυτοκινήτου ως τον πιο σημαντικό παράγοντα, τη μάρκα του αυτοκινήτου και τη χρονιά έκδοσης ως εξίσου σημαντικά, να αδιαφορεί για την προτίμησή του πάνω στη δυνατότητα χρήσης αμόλυβδης βενζίνης σε σχέση με τα άλλα χαρακτηριστικά, κτλ.).

Μια προτίμηση που δηλώνεται από έναν χρήστη μέσω των χαρακτηριστικών των αντικειμένων μιας συγκεκριμένης συλλογής, έχει ως αποτέλεσμα *τη διάταξη των αντικειμένων με βάση την προτίμηση αυτή*. Για το λόγο αυτό, η έννοια της διάταξης παίζει σημαντικό ρόλο, τόσο για την αναπαράσταση των προτιμήσεων πάνω στις τιμές των εμπλεκόμενων χαρακτηριστικών, όσο και για την τελική κατάταξη των διαθέσιμων αντικειμένων.

Η έννοια της προτίμησης πάνω σε συλλογές αντικειμένων έχει, πλέον, εξαπλωθεί σε μεγάλο βαθμό στο περιβάλλον της επιστημονικής κοινότητας και αποτελεί, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ένα από τα βασικότερα

χαρακτηριστικά των αναπτυγμένων και αναπτυσσόμενων εφαρμογών λογισμικού στο πλαίσιο της *εξατομίκευσης (personalization)* της πληροφορίας που διαχειρίζονται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μια σειρά από ερευνητικές εργασίες ([1], [5], [7], [8], [14], [19], [24]), οι οποίες ποικίλουν ανάλογα με το είδος της πληροφορίας που διατάσσεται, καθώς και την ποιότητα των προτιμήσεων του χρήστη που χρησιμοποιούνται για την διάταξη αυτή. Παρά την μεγάλη ανομοιογένεια που τις χαρακτηρίζει, μπορούμε να τις διαχωρίσουμε σε δύο βασικές κατηγορίες:

1. *Ποιοτικές (Qualitative) προσεγγίσεις* ([5], [7], [8], [19], [24]): Στις προσεγγίσεις αυτές, οι προτιμήσεις των χρηστών πάνω σε ένα σύνολο αντικειμένων, καθορίζονται *άμεσα* με την υιοθέτηση *δυαδικών σχέσεων προτίμησης* στο σύνολο αυτό. Δεδομένης μιας τέτοιας σχέσης, ένα αντικείμενο o είναι προτιμότερο ενός αντικειμένου o' άνν το o προηγείται του o' με βάση τη σχέση αυτή.
2. *Ποσοτικές (Quantitative) προσεγγίσεις* ([1], [14])*:* Στις προσεγγίσεις αυτές, οι προτιμήσεις των χρηστών πάνω στο σύνολο των αντικειμένων, καθορίζονται *έμμεσα* με την χρήση *συναρτήσεων βαθμολόγησης* (scoring functions), οι οποίες αποδίδουν έναν αριθμό-βαθμό σε κάθε στοιχείο του συνόλου. Δεδομένης μιας τέτοιας συνάρτησης, ένα αντικείμενο o είναι προτιμότερο ενός αντικειμένου o' άνν ο βαθμός του o είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο βαθμό του o'.

Γενικά, οι ποιοτικές προσεγγίσεις είναι πιο εκφραστικές από τις ποσοτικές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ενώ *μπορούμε να αναπαραστήσουμε οποιαδήποτε συνάρτηση βαθμολόγησης μέσω μιας αντίστοιχης δυαδικής σχέσης προτίμησης* (θέτοντας μέσω της σχέσης αυτής ότι ένα αντικείμενο o προηγείται ενός αντικειμένου o' άνν ο βαθμός του o με βάση τη συνάρτηση βαθμολόγησης είναι μεγαλύτερος από τον ομόλογο βαθμό του o'), δεν είναι πάντοτε δυνατό κάθε διαισθητική σχέση προτίμησης να αναπαρασταθεί από μια συνάρτηση βαθμολόγησης στο [11] αναφέρονται *συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί* μια δυαδική σχέση προτίμησης για να μπορεί να αναπαρασταθεί από συνάρτηση βαθμολόγησης). Π.χ., ας υποθέσουμε ένα σύνολο B από μπάλες που χαρακτηρίζονται από το χρώμα και το βάρος τους (συγκεκριμένα, όσον αφορά το βάρος, οι μπάλες αυτές μπορεί να είναι είτε βαριές, είτε

ελαφριές) και έστω b_1 μια κόκκινη και βαριά μπάλα, b_2 μια κόκκινη και ελαφριά μπάλα, και b_3 μια κίτρινη και βαριά μπάλα, όπου $b_1, b_2, b_3 \in B$. Επίσης, έστω η παρακάτω προτίμηση ενός χρήστη στο B: «Δεν έχω ιδιαίτερη προτίμηση πάνω στο χρώμα των μπαλών, αλλά μεταξύ των κόκκινων μπαλών προτιμώ τις βαριές». Λόγω της προτίμησης των κόκκινων και βαριών μπαλών σε σχέση με τις κόκκινες και ελαφριές μπάλες, μια αντίστοιχη συνάρτηση βαθμολόγησης δίνει μεγαλύτερο βαθμό στην b_1 απ' ότι στην b_2. Όμως, δεδομένου ότι ο χρήστης δεν έχει κάποια ιδιαίτερη προτίμηση πάνω στο χρώμα των μπαλών, η συνάρτηση αυτή πρέπει να δώσει στην b_3 βαθμό ίδιο με αυτόν που έδωσε στην b_1 και στην b_2, πράγμα που είναι αδύνατο, αφού οι b_1 και b_2 έχουν διαφορετικούς βαθμούς. Επομένως, μια ποιοτική προσέγγιση μπορεί να προσδιορίσει περισσότερες εκφράσεις προτιμήσεων του χρήστη σε σχέση με μια ποσοτική.

1.3 Συνεισφορά της Εργασίας μας

Η εργασία μας προτείνει ένα *τυπικό μοντέλο πάνω στην αναπαράσταση προτιμήσεων για τη διάταξη συλλογών αντικειμένων*. Η βασική του ιδέα έγκειται στην αναπαράσταση των εκάστοτε χαρακτηριστικών που προσδιορίζουν τα αντικείμενα αυτά μέσω *μερικών συναρτήσεων*, οι οποίες και αντιστοιχούν σε κάθε αντικείμενο μια το πολύ τιμή από το σύνολο τιμών των χαρακτηριστικών αυτών. Η συνεισφορά του σε σχέση με τις προσεγγίσεις που αναφέραμε προηγουμένως μπορεί να συνοψιστεί σε τέσσερα βασικά σημεία:

a) Μέσω της αντιμετώπισης των χαρακτηριστικών ως συναρτήσεις, το μοντέλο μας αποτελεί ένα *γενικό μοντέλο προτιμήσεων, ανεξάρτητο από τα συγκεκριμένα μοντέλα δεδομένων που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση των συλλογών αντικειμένων*. Ιδιαίτερα, προτείνουμε ένα ελάχιστο (minimal) σύνολο εννοιών και κατασκευαστών προτιμήσεων για τη διάταξη των εκάστοτε διαθέσιμων αντικειμένων. Επιπροσθέτως, με βάση το γεγονός ότι το συναρτησιακό πλαίσιο παρέχει ένα αρκετά ευέλικτο σύνολο από συναρτησιακές πράξεις που οδηγούν σε νέες συναρτήσεις από ήδη

υπάρχουσες, το μοντέλο μας είναι αρκετά εκφραστικό και επεκτάσιμο για τη δήλωση πιο πολύπλοκων προτιμήσεων. Οι υπάρχουσες προσεγγίσεις στηρίζονται πάνω σε *συγκεκριμένα μοντέλα δεδομένων*, όπως είναι το σχεσιακό ([1], [5], [7], [8], [14], [19], [24]) και το XML μοντέλο δεδομένων ([19]), οπότε και δύσκολα μπορούν να επεκταθούν σε διαφορετικά μοντέλα δεδομένων. Επίσης, είναι αρκετά πλεονασματικές ως προς την αναπαράσταση και κατασκευή των προτιμήσεων.

b) Το μοντέλο μας αντιμετωπίζει τις εκάστοτε προτιμήσεις ως μερικές διατάξεις (partial orders) και όχι ως ολικές διατάξεις (total orders), όπως οι ποσοτικές προσεγγίσεις μέσω των συναρτήσεων βαθμολόγησης. Επιπροσθέτως, οι άλλες ποιοτικές προσεγγίσεις, είτε δεν θεωρούν ότι οι προτιμήσεις ορίζουν διατάξεις (π.χ. [7],[8]), είτε θεωρούν *αυστηρές* μερικές διατάξεις (π.χ. [19]). Η αντιμετώπιση των προτιμήσεων ως ολικές διατάξεις είναι αρκετά αυστηρή, εφόσον οι εκάστοτε προτιμήσεις ενός χρήστη συνήθως περιέχουν μια δόση *ασάφειας*, η οποία μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω των μερικών διατάξεων. Επίσης, η θεώρηση των προτιμήσεων ως *αυστηρές μερικές διατάξεις* δεν προσφέρει κάτι παραπάνω στη σημασιολογία τους σε σχέση με τις μερικές διατάξεις. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της προσέγγισής μας αποτελεί η κατασκευή, μέσω συγκεκριμένων αλγορίθμων που αναπτύξαμε, *ολικών διατάξεων* των αντικειμένων μας από μερικές διατάξεις στις τιμές των αναγνωριστικών τους με τη *χρήση κατάλληλων κλάσεων ισοδυναμίας*. Με βάση αυτές τις ολικές διατάξεις, τα εκάστοτε αποτελέσματα μπορούν να παρουσιαστούν με τρόπο κατανοητό για το χρήστη, όπως, π.χ., ως μια αλληλουχία *οθονών αποτελεσμάτων, διαφορετικών σε κάθε οθόνη, ξεκινώντας από την οθόνη με τα καλύτερα αποτελέσματα, συνεχίζοντας με την οθόνη που εμφανίζει τα επόμενα καλύτερα αποτελέσματα, και ούτω καθεξής, καταλήγοντας, τελικά, στην οθόνη με τα χειρότερα αποτελέσματα*. Μέσω μιας τέτοιας αλληλουχίας οθονών, η σημασιολογία της συσχέτισης των αντικειμένων για την τελική επιλογή του χρήστη στηρίζεται σε δύο βασικά σημεία:

i. Κάθε αντικείμενο που περιέχεται σε μια οθόνη αποτελεί *καλύτερη επιλογή* για το χρήστη σε σχέση με κάθε αντικείμενο που περιέχεται σε οθόνη *που έπεται αυτής* στην αλληλουχία, εφοδιάζοντας έτσι το χρήστη αρχικά και μετέπειτα με τις καλύτερες δυνατές απαντήσεις. Η μεθοδολογία της τοποθέτησης των στοιχείων στις αντίστοιχες οθόνες με βάση την παραπάνω θεώρηση διαφέρει ανάλογα με τον αλγόριθμο που χρησιμοποιείται για την ολική διάταξη.

ii. Αντικείμενα που βρίσκονται στην *ίδια* οθόνη αποτελούν *ισοδύναμα* αποτελέσματα για το χρήστη, οπότε και κάθε οθόνη στην αλληλουχία παρέχει *ισοδύναμες εναλλακτικές (alternative) επιλογές* στο χρήστη, προσφέροντάς του, έτσι, τη δυνατότητα να διαλέξει μεταξύ αυτών.

Στις υπόλοιπες ποιοτικές προσεγγίσεις, είτε δεν κατασκευάζονται τελικές ολικές διατάξεις [19], είτε δεν ορίζεται αυστηρά η ισοδυναμία μεταξύ των αντικειμένων [7], [8].

c) Μέσω της παραπάνω κατασκευής ολικών διατάξεων πάνω σε σύνολα αντικειμένων, το μοντέλο μας βασίζεται τελικά σε προδιατάξεις (preorders) των αντικειμένων μέσω των δηλωμένων προτιμήσεων, οι οποίες και παρέχουν τη δυνατότητα των ισοδύναμων εναλλακτικών επιλογών στο χρήστη. Κάτι τέτοιο *δεν* συντελείται με τη μη-απόδοση ιδιοτήτων στις προτιμήσεις [7], [8], καθώς και με τη θεώρηση αυστηρών μερικών διατάξεων [19], όπου η έννοια της ισοδύναμης επιλογής *δεν* μπορεί να υποστηριχτεί.

d) Η προσέγγισή μας επιτρέπει τη δημιουργία μερικών διατάξεων μέσω προτιμήσεων, τόσο στο επίπεδο των δεδομένων (δηλαδή στις τιμές των χαρακτηριστικών των αντικειμένων), *όσο και στο επίπεδο των χαρακτηριστικών*. Αυτή η λειτουργικότητα είναι σημαντική για εφαρμογές όπως αυτές του Σημασιολογικού Ιστού (Semantic Web), οι οποίες χρησιμοποιούν μεγάλα σχήματα ή που στα σχήματα αυτά υπάρχουν ήδη μερικές διατάξεις (π.χ., κλάσεων/ιδιοτήτων). Οι παραπάνω προσεγγίσεις δημιουργούν μέσω των θεωρητικών υποβάθρων τους, *μόνο ολικές διατάξεις* στο επίπεδο των

χαρακτηριστικών, οι οποίες είναι εκφραστικά πιο περιοριστικές από τις μερικές.

1.4 Οργάνωση της Αναφοράς

Η εργασία μας οργανώνεται ως εξής: Στο Κεφάλαιο 2, εισάγουμε βασικές έννοιες και ορισμούς της Θεωρίας Διατάξεων (Order Theory), τις οποίες και σκοπεύουμε να χρησιμοποιήσουμε για τη θεμελίωση και αναπαράσταση των προτιμήσεων στο συναρτησιακό πλαίσιό μας. Στο Κεφάλαιο 3, παρουσιάζουμε το θεωρητικό υπόβαθρο για τον καθορισμό προτιμήσεων και την αντίστοιχη διάταξη των αντικειμένων πάνω στη συναρτησιακή αναπαράσταση στην οποία βασίζεται το μοντέλο μας. Η ανάλυση αυτή χωρίζεται σε τρία μέρη: (α) Στον γενικό ορισμό της προτίμησης στο συναρτησιακό περιβάλλον, (β) Στην αντιστοίχηση της μερικής διάταξης στις τιμές των συναρτήσεων-χαρακτηριστικών, μέσω μιας δηλωμένης προτίμησης, σε ολική διάταξη των διαθέσιμων αντικειμένων που αναπαριστά την τελική αλληλουχία οθονών, και (γ) Στην διαδικασία κατασκευής των προτιμήσεων του πλαισίου μας με βάση τις προτιμήσεις του χρήστη στο επίπεδο των τιμών των συναρτήσεων-χαρακτηριστικών των αντικειμένων και στο επίπεδο των συναρτήσεων αυτών. Στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάζουμε την επισκόπιση των σχετικών προσεγγίσεων για την αναπαράσταση προτιμήσεων και τη διάταξη των διαθέσιμων αντικειμένων, επικεντρώνοντας την προσοχή μας στις ποιοτικές προσεγγίσεις των Chomicki [7], [8] και Kießling [19], οι οποίες αποτελούν τις σημαντικότερες και εκφραστικά πλουσιότερες ερευνητικές δουλειές της κατηγορίας αυτής. Στο Κεφάλαιο 5, αναλύουμε πώς το συναρτησιακό πλαίσιό μας μπορεί να εφαρμοστεί για τη διάταξη πληροφοριακών πόρων που αναπαρίστανται στο μοντέλο δεδομένων της RDF, χρησιμοποιώντας παραδείγματα από δηλώσεις προτιμήσεων χρηστών, και, τέλος, στο Κεφάλαιο 6, κλείνουμε τη συγκεκριμένη μεταπτυχιακή εργασία, ανακεφαλαιώνοντας την προσφορά της και αναφέροντας κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή στη Θεωρία των Διατάξεων

Σημασιολογικά, η θεμελίωση και η αναπαράσταση προτιμήσεων πάνω σε σύνολα αντικειμένων στηρίζονται ως επί πλείστον στις έννοιες της διάταξης και της ισοδυναμίας που χαρακτηρίζουν τα αντικείμενα αυτά με βάση την εκάστοτε δηλωμένη προτίμηση. Δεδομένου αυτού του σημαντικού ρόλου των δύο παραπάνω εννοιών, παραθέτουμε σε αυτό το κεφάλαιο τους βασικότερους ορισμούς από τη Θεωρία Διατάξεων (Order Theory), την οποία και πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια της εργασίας μας για να θεμελιώσουμε το μοντέλο προτιμήσεων που προτείνουμε.

2.1 Μερικές Διατάξεις (Partial Orders)

Ορισμός 2.1: *Έστω σύνολο* P και $\leq_P$ *μια δυαδική σχέση πάνω στα στοιχεία του* P. *Η σχέση* $\leq_P$ *είναι μερική διάταξη (partial order) του* P, *αν είναι:*

- ***Ανακλαστική (Reflexive):*** $\forall x \in P,\ x \leq_P x$
- ***Αντισυμμετρική (Antisymmetric):*** $\forall x, y \in P$, *αν* $x \leq_P y$ και $y \leq_P x$ τότε $x = y$
- ***Μεταβατική (Transitive):*** $\forall x, y, z \in P$, *αν* $x \leq_P y$ και $y \leq_P z$ τότε $x \leq_P z$

Το σύνολο P *ονομάζεται μερικώς διατεταγμένο σύνολο (partial ordered set) ως προς* $\leq_P$.□

Είναι δυνατό ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο να περιέχει στοιχεία τα οποία *δεν συσχετίζονται μεταξύ τους* μέσω της αντίστοιχης μερικής διάταξης. Συγκεκριμένα, έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2.2: *Έστω* P *ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς* $\leq_P$. *Τότε δύο στοιχεία* $x, y \in P$ *είναι μη-διατασσόμενα μεταξύ τους (incomparable) με βάση την* $\leq_P$, *αν* $x \not\leq_P y$ *και* $y \not\leq_P x$, *όπου η έκφραση* $x \not\leq_P y$ $(y \not\leq_P x)$ *σημαίνει ότι η πρόταση* $x \leq_P y$ $(y \leq_P x)$ *δεν ισχύει.*□

Για μερικώς διατεταγμένα σύνολα που ικανοποιούν *εξεζητημένες περιπτώσεις*, καθορίζονται κάποιοι ειδικοί χαρακτηρισμοί. Οι κυριότεροι από αυτούς είναι η *αλυσίδα (chain)* και η *αντι-αλυσίδα (antichain)*:

Ορισμός 2.3: *Έστω* P *ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς* $\leq_P$. *Τότε, το* P *ονομάζεται αλυσίδα (chain), αν* $\forall x, y \in P$, *ισχύει ότι* $x \leq_P y$ *ή* $y \leq_P x$.□

Απ' ότι παρατηρούμε, όλα τα στοιχεία που ανήκουν σε μια αλυσίδα είναι ανά δύο διατασσόμενα μεταξύ τους. Οι αλυσίδες ονομάζονται και ολικά διατεταγμένα σύνολα (totally ordered sets) και οι δυαδικές σχέσεις που τις χαρακτηρίζουν ολικές διατάξεις (total orders).

Ορισμός 2.4: *Έστω* P *ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς* $\leq_P$. *Τότε, το* P *ονομάζεται αντι-αλυσίδα (antichain), αν* $\forall x, y \in P$, $x \leq_P y$ *μόνο όταν* $x = y$.□

Σημασιολογικά, η αντι-αλυσίδα είναι το *ακριβώς αντίθετο άκρο* της αλυσίδας. Στην αλυσίδα, *όλα* τα στοιχεία διατάσσονται ανά δύο μεταξύ τους. Από την άλλη πλευρά, στην αντι-αλυσίδα, η διάταξη αφορά *μόνο* στοιχεία ίσα ανά δύο, όποτε, δεδομένου ότι η αντι-αλυσίδα αποτελεί σύνολο (με στοιχεία διαφορετικά ανά δύο), τελικά δεν υπάρχει *καμία διάταξη* μεταξύ των στοιχείων της.

Κάθε πεπερασμένο (finite) σύνολο που είναι και μερικώς διατεταγμένο ως προς μια μερική διάταξη, μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά μέσω ενός γράφου ως ακολούθως:

Ορισμός 2.5: *Έστω πεπερασμένο σύνολο* P *το οποίο είναι μερικώς διατεταγμένο ως προς* $\leq_P$. *Ένας μη-κατευθυνόμενος (undirected) γράφος* $G = (V, E)$, *για τον οποίο:*

a) Κάθε στοιχείο του P *αποτελεί κόμβο που ανήκει στο* V, *και*

b) Υπάρχει ακμή $e \in E$ *που πηγαίνει ανοδικά από έναν κόμβο* $v \in V$ *σε ένα άλλον κόμβο* $v' \in V$ *άνν το* v *καλύπτεται από το* v', *δηλαδή άνν* $v \neq v'$, $v \leq_P v'$ *και* $\neg\exists x \in V$ *με* $x \neq v$ *και* $x \neq v'$, *τέτοιο ώστε* $v \leq_P x \leq_P v'$,

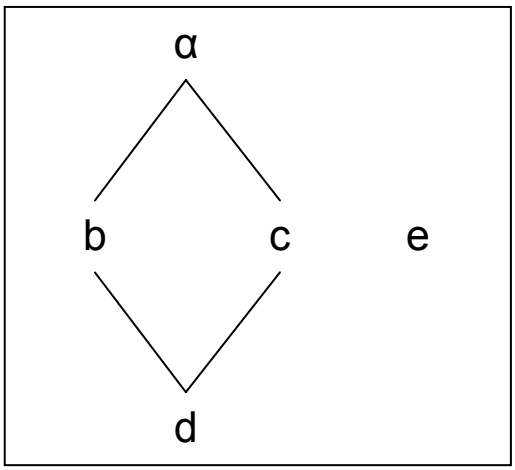
αποτελεί ένα διάγραμμα Hasse του P.□

Από τον παραπάνω ορισμό βλέπουμε ότι υπάρχουν αρκετοί περιορισμοί για τη σχεδίαση ενός «έγκυρου» διαγράμματος Hasse, όπως είναι το ύψος στο οποίο πρέπει να τοποθετηθούν τα στοιχεία-κόμβοι ή ότι δύο στοιχεία-κόμβοι που συνδέονται με μια ακμή δεν πρέπει να είναι στο ίδιο ύψος κ.ά. Ωστόσο, σχεδιάζοντας ένα έγκυρο διάγραμμα Hasse για ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, δημιουργείται μια αρκετά καλή σχηματική αναπαράσταση της διάταξης στο σύνολο αυτό. Συγκεκριμένα:

a) Για δύο *διαφορετικά* στοιχεία-κόμβους x, y ισχύει ότι $y \leq_P x$, αν υπάρχει στο διάγραμμα μονοπάτι μιας ή περισσοτέρων *ανοδικών* ακμών από το y στο x.

b) Δύο στοιχεία-κόμβοι του διαγράμματος που δεν συνδέονται με μονοπάτι ανοδικών ακμών *δεν διατάσσονται μεταξύ τους.*

Παράδειγμα 2.1: Έστω $A = \{a, b, c, d, e\}$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς $\leq_A$, όπου $d \leq_A b$, $b \leq_A a$, $d \leq_A c$ και $c \leq_A a$ (συνεπάγεται κι ότι $d \leq_A a$ από τις δύο πρώτες ή τις δύο τελευταίες συσχετίσεις). Το διάγραμμα που παρουσιάζεται στην Εικόνα 2.1 αποτελεί ένα διάγραμμα Hasse του A.□



Εικόνα 2.1 - Το διάγραμμα Hasse του A

Μεταξύ των στοιχείων ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου, υπάρχουν κάποια με ιδιαίτερη σημασία:

Ορισμός 2.6: *Έστω* P *ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς* $\leq_P$. *Ένα στοιχείο* $\omega \in P$ *είναι ένα μέγιστο στοιχείο (maximal element) του* P *με βάση την* $\leq_P$, *αν* $\neg\exists z \in P$ με $z \neq \omega$, *τέτοιο ώστε* $\omega \leq_P z$. □

Ορισμός 2.7: *Έστω* P *ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς* $\leq_P$. *Ένα στοιχείο* $\omega' \in P$ *είναι ένα ελάχιστο στοιχείο (minimal element) του* P *με βάση την* $\leq_P$, *αν* $\neg\exists z \in P$ με $z \neq \omega'$, *τέτοιο ώστε* $z \leq_P \omega'$. □

Απ' ότι παρατηρούμε από τους παραπάνω ορισμούς, υπάρχει περίπτωση ένα μέγιστο στοιχείο ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου να αποτελεί και ελάχιστο στοιχείο του συνόλου αυτού και αντίστροφα. Π.χ., στο Παράδειγμα 2.1, το μερικώς διατεταγμένο σύνολο A έχει μέγιστα στοιχεία τα a και e και ελάχιστα στοιχεία τα d και e, οπότε το e αποτελεί μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο του A.

Για τη σχέση μεταξύ των μέγιστων και μεταξύ των ελάχιστων στοιχείων ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου, ισχύει το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 2.1: *Έστω* P *ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς* $\leq_P$ *και* $MAX_P \subseteq P$, $MIN_P \subseteq P$ *τα σύνολα των μέγιστων και ελάχιστων στοιχείων του* P *με βάση την* $\leq_P$ *αντίστοιχα. Τότε:*

a) $\forall x, y \in MAX_P$ *με* $x \neq y$, *ισχύει ότι* $x \not\leq_P y$ *και* $y \not\leq_P x$ *(δηλαδή τα* x, y *είναι μη-διατασσόμενα μεταξύ τους με βάση την* $\leq_P$*).*

b) $\forall w, z \in MIN_P$ *με* $w \neq z$, *ισχύει ότι* $w \not\leq_P z$ *και* $z \not\leq_P w$ *(δηλαδή τα* w, z *είναι μη-διατασσόμενα μεταξύ τους με βάση την* $\leq_P$*).*□

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο για κάθε περίπτωση χωριστά. Συγκεκριμένα:

a) Έστω ότι η πρώτη περίπτωση *δεν ισχύει*, δηλαδή $\exists x', y' \in MAX_P$ με $x' \neq y'$, τέτοια ώστε $x' \leq_P y'$. Όμως, αφού $y' \in P$ και $x' \leq_P y'$, το x' *δεν αποτελεί μέγιστο στοιχείο του* P, εφόσον δεν ανταποκρίνεται στον Ορισμό 2.6. Οπότε $x' \notin MAX_P$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο, επομένως η πρώτη περίπτωση ισχύει.

b) Έστω ότι η δεύτερη περίπτωση *δεν ισχύει*, δηλαδή $\exists w', z' \in MIN_P$ με $w' \neq z'$, τέτοια ώστε $w' \leq_P z'$. Όμως, αφού $w' \in P$ και $w' \leq_P z'$, το z' *δεν αποτελεί ελάχιστο στοιχείο του* P, εφόσον δεν ανταποκρίνεται στον Ορισμό 2.7. Οπότε $z' \notin MIN_P$, άρα οδηγούμαστε σε άτοπο, επομένως και η δεύτερη περίπτωση ισχύει. □

Όπως αναφέρεται στο [9], στην περίπτωση που ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι *μη-κενό και πεπερασμένο*, ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2.1: *Έστω* P *ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς* $\leq_P$*, το οποίο είναι μη-κενό και πεπερασμένο. Τότε:*

a) Έχει τουλάχιστον ένα μέγιστο και τουλάχιστον ένα ελάχιστο στοιχείο με βάση την $\leq_P$*, και*

b) Αν $MAX_P \subseteq P$ *και* $MIN_P \subseteq P$ *τα σύνολα των μέγιστων και ελάχιστων στοιχείων του* P *με βάση την* $\leq_P$, *τότε,* $\forall x \in P$, $\exists y \in MAX_P, z \in MIN_P$, *τέτοια ώστε* $x \leq_P y$ *και* $z \leq_P x$.□

Διαισθητικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα μέγιστα και τα ελάχιστα στοιχεία ενός μη-κενού, πεπερασμένου και μερικώς διατεταγμένου συνόλου *αποτελούν τα άνω και κάτω άκρα, αντίστοιχα, της μερικής διάταξής του*.

Δεδομένης μιας μερικής διάταξης σε ένα σύνολο, η διάταξη αυτή χαρακτηρίζει και όλα τα υποσύνολα του συνόλου αυτού. Συγκεκριμένα, έχουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 2.2: *Έστω* P *ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς* $\leq_P$. *Τότε, κάθε σύνολο* $S \subseteq P$ *είναι μερικώς διατεταγμένο ως προς* $\leq_P$.□

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι προφανής, μέσω της διατήρησης των τριών ιδιοτήτων της $\leq_P$ που τη χαρακτηρίζουν ως μερική διάταξη. Συγκεκριμένα, η $\leq_P$ είναι:

a) Ανακλαστική στο S, δηλαδή $\forall x \in S$, $x \leq_P x$, καθότι κάθε x που ανήκει στο S ανήκει και στο P και η $\leq_P$ είναι ανακλαστική στο P,

b) Αντισυμμετρική στο S, δηλαδή $\forall x, y \in S$, αν $x \leq_P y$ και $y \leq_P x$ τότε $x = y$, καθότι κάθε x, y που ανήκουν στο S ανήκουν και στο P και η $\leq_P$ είναι αντισυμμετρική στο P,

c) Μεταβατική στο S, δηλαδή $\forall x, y, z \in S$, αν $x \leq_P y$ και $y \leq_P z$ τότε $x \leq_P z$, καθότι κάθε x, y, z που ανήκουν στο S ανήκουν και στο P και η $\leq_P$ είναι μεταβατική στο P,

οπότε αποτελεί μερική διάταξη του S. □

2.1.1 Ομοιομορφισμός Μερικώς Διατεταγμένων Συνόλων

Υπάρχει περίπτωση δύο μερικώς διατεταγμένα σύνολα να είναι *διαισθητικά ισοδύναμα*, όσον αφορά τον αριθμό των στοιχείων που περιέχουν

και τον τρόπο με τον οποίο διατάσσονται τα στοιχεία αυτά. Αυτή η ισοδυναμία εκφράζεται τυπικά μέσω του παρακάτω ορισμού:

Ορισμός 2.8: *Έστω* P, Q *μερικώς διατεταγμένα σύνολα ως προς* $\leq_P$ *και* $\leq_Q$ *αντίστοιχα. Τα* P *και* Q *είναι ισομορφικά διατεταγμένα (order-isomorphic) και γράφουμε* $P \cong Q$, *αν υπάρχει συνάρτηση* $\phi : P \to Q$ *που είναι επί (onto), δηλαδή* $\forall u \in Q$, $\exists x \in P : \phi(x) = u$, *και για την οποία* $\forall x, y \in P$, $x \leq_P y$ *άνν* $\phi(x) \leq_Q \phi(y)$. *Η* ϕ *αποκαλείται ισομορφισμός διάταξης (order-isomorphism) των* P *και* Q. □

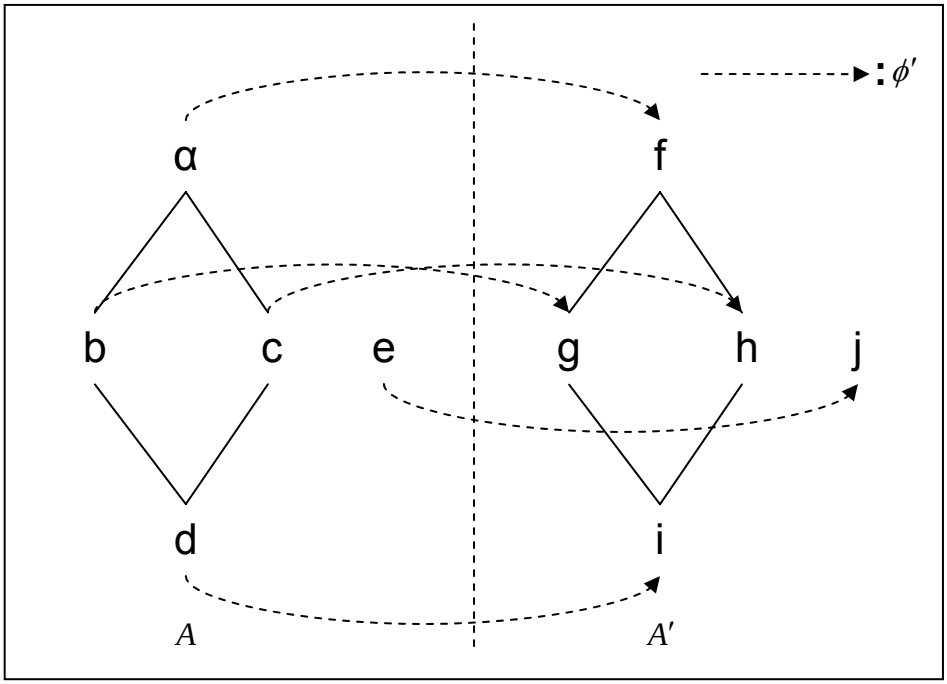
Όπως αποδεικνύεται στο [9], κάθε συνάρτηση που αποτελεί ισομορφισμό διάταξης δύο μερικώς διατεταγμένων συνόλων, χαρακτηρίζεται από την παρακάτω ιδιότητα:

Λήμμα 2.3: *Έστω* P, Q *μερικώς διατεταγμένα σύνολα ως προς* $\leq_P$ *και* $\leq_Q$ *αντίστοιχα και* $\phi : P \to Q$ *ένας ισομορφισμός διάταξης των συνόλων αυτών. Τότε η* ϕ *είναι αμφιμονοσήμαντη (bijective), το οποίο σημαίνει ότι εκτός από επί είναι και ένα-προς-ένα (one-to-one), δηλαδή* $\forall x, y \in P$, *αν* $\phi(x) = \phi(y)$, *όπου* $\phi(x), \phi(y) \in Q$, *τότε* $x = y$. □

Διαισθητικά, μια συνάρτηση που αποτελεί ισομορφισμό διάταξης δύο μερικώς διατεταγμένων συνόλων, «καθρεφτίζει» τη δομή της διάταξης των στοιχείων από το ένα σύνολο στο άλλο. Για να γίνει αυτό πιο σαφές, παραθέτουμε ένα απλό παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.2: Έστω το μερικώς διατεταγμένο σύνολο A του Παραδείγματος 2.1 και έστω ένα σύνολο $A' = \{f, g, h, i, j\}$ μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_{A'}$, όπου $i \leq_{A'} g$, $g \leq_{A'} f$, $i \leq_{A'} h$ και $h \leq_{A'} f$ (συνεπάγεται κι ότι $i \leq_{A'} f$ από τις δύο πρώτες ή τις δύο τελευταίες συσχετίσεις). Απ' ότι παρατηρούμε, τα A και A' είναι ισομορφικά διατεταγμένα ($A \cong A'$), εφόσον η επί συνάρτηση $\phi' : A \to A'$ με $\phi'(a) = f$,

$\phi'(b) = g$, $\phi'(c) = h$, $\phi'(d) = i$ και $\phi'(e) = j$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Ορισμού 2.8. Η Εικόνα 2.2 παρουσιάζει τα διαγράμματα Hasse των A και A', όπου η αντιστοιχία της διάταξης μέσω ϕ' είναι προφανής. □



Εικόνα 2.2 - Τα διαγράμματα Hasse των A και A'

Με βάση τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν έναν ισομορφισμό διάταξης μεταξύ δύο μερικώς διατεταγμένων συνόλων, οδηγούμαστε στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.1: *Έστω P, Q δύο σύνολα, όπου το P είναι μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_P$ και έστω μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $\phi : P \to Q$. Τότε, η δυαδική σχέση $\leq_Q$, τέτοια ώστε $\forall u, v \in Q$, $u \leq_Q v$ άνν $x \leq_P y$, όπου $x, y \in P$, $\phi(x) = u$ και $\phi(y) = v$, αποτελεί μερική διάταξη του Q, η οποία αντικατοπτρίζει την $\leq_P$ πάνω στο σύνολο αυτό.* □

<u>Απόδειξη</u>: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\leq_Q$ είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική στο Q. Συγκεκριμένα:

a) Έστω ότι η $\leq_Q$ *δεν είναι ανακλαστική* στο Q, δηλαδή $\exists u', v' \in Q$, τέτοια ώστε $u' = v'$ και $u' \not\leq_Q v'$. Η $\phi : P \to Q$ είναι επί (ως αμφιμονοσήμαντη), οπότε $\exists x', y' \in P$ τέτοια ώστε $\phi(x') = u'$ και

$\phi(y') = v'$. Με βάση τις ισότητες αυτές και από τον ορισμό της $\leq_Q$, προκύπτει ότι $u' \leq_Q v' \Leftrightarrow x' \leq_P y'$, άρα $u' \not\leq_Q v' \Leftrightarrow x' \not\leq_P y'$ (1). Επίσης, καθώς η $\phi : P \to Q$ είναι και ένα-προς-ένα (ως αμφιμονοσήμαντη), ισχύει ότι $u' = v' \Rightarrow x' = y'$ (2), εφόσον $\phi(x') = u'$ και $\phi(y') = v'$. Όμως, η $\leq_P$ είναι ανακλαστική στο P, οπότε $x' = y' \Rightarrow x' \leq_P y'$, άρα η (2) ανάγεται στην $u' = v' \Rightarrow x' \leq_P y'$ (3). Όπως βλέπουμε, μέσω των (1) και (3) η αρχική μας υπόθεση ανάγεται στις προτάσεις $x' \not\leq_P y'$ και $x' \leq_P y'$, οι οποίες αναιρούν η μια την άλλη. Επομένως, καταλήγουμε σε άτοπο, άρα η $\leq_Q$ είναι ανακλαστική στο Q.

b) Έστω ότι η $\leq_Q$ *δεν είναι αντισυμμετρική* στο Q, δηλαδή $\exists u', v' \in Q$, τέτοια ώστε $u' \leq_Q v'$, $v' \leq_Q u'$ και $u' \neq v'$. Η $\phi : P \to Q$ είναι επί (ως αμφιμονοσήμαντη), οπότε $\exists x', y' \in P$ τέτοια ώστε $\phi(x') = u'$ και $\phi(y') = v'$. Με βάση τις ισότητες αυτές και από τον ορισμό της $\leq_Q$, προκύπτει ότι $u' \leq_Q v' \Leftrightarrow x' \leq_P y'$, καθώς επίσης και $v' \leq_Q u' \Leftrightarrow y' \leq_P x'$, οπότε $u' \leq_Q v' \wedge v' \leq_Q u' \Leftrightarrow x' \leq_P y' \wedge y' \leq_P x'$ (1). Όπως ξέρουμε, η $\leq_P$ είναι αντισυμμετρική στο P, οπότε $x' \leq_P y' \wedge y' \leq_P x' \Rightarrow x' = y'$, άρα η (1) ανάγεται στην $u' \leq_Q v' \wedge v' \leq_Q u' \Rightarrow x' = y'$ (2). Όμως, καθώς η ϕ είναι συνάρτηση, ισχύει ότι $x' = y' \Rightarrow \phi(x') = \phi(y')$ ή ισοδύναμα $x' = y' \Rightarrow u' = v'$, οπότε η (2) ανάγεται στην $u' \leq_Q v' \wedge v' \leq_Q u' \Rightarrow u' = v'$ (3). Όπως βλέπουμε, μέσω της (3) η αρχική μας υπόθεση ανάγεται στις προτάσεις $u' = v'$ και $u' \neq v'$, οι οποίες αναιρούν η μια την άλλη. Επομένως, καταλήγουμε σε άτοπο, άρα η $\leq_Q$ είναι αντισυμμετρική στο Q.

c) Έστω ότι η $\leq_Q$ *δεν είναι μεταβατική* στο Q, δηλαδή $\exists u', v', w' \in Q$, τέτοια ώστε $u' \leq_Q v'$, $v' \leq_Q w'$ και $u' \not\leq_Q w'$. Η $\phi : P \to Q$ είναι επί (ως αμφιμονοσήμαντη), οπότε $\exists x', y', z' \in P$ τέτοια ώστε $\phi(x') = u'$, $\phi(y') = v'$ και $\phi(z') = w'$. Με βάση τις ισότητες αυτές και από τον

ορισμό της $\leq_Q$, προκύπτει ότι $u' \leq_Q v' \Leftrightarrow x' \leq_P y'$, καθώς επίσης και $v' \leq_Q w' \Leftrightarrow y' \leq_P z'$, οπότε $u' \leq_Q v' \wedge v' \leq_Q w' \Leftrightarrow x' \leq_P y' \wedge y' \leq_P z'$ (1). Όπως ξέρουμε, η $\leq_P$ είναι μεταβατική στο P, οπότε $x' \leq_P y' \wedge y' \leq_P z' \Rightarrow x' \leq_P z'$, άρα η (1) ανάγεται στην $u' \leq_Q v' \wedge v' \leq_Q w' \Rightarrow x' \leq_P z'$ (2). Όμως, με βάση τον ορισμό της $\leq_Q$ και τις ισότητες $\phi(x') = u'$ και $\phi(z') = w'$ έχουμε ότι $u' \leq_Q w' \Leftrightarrow x' \leq_P z'$, οπότε η (2) ανάγεται στην $u' \leq_Q v' \wedge v' \leq_Q w' \Rightarrow u' \leq_Q w'$ (3). Όπως βλέπουμε, μέσω της (3) η αρχική μας υπόθεση ανάγεται στις προτάσεις $u' \leq_Q w'$ και $u' \not\leq_Q w'$, οι οποίες αναιρούν η μια την άλλη. Επομένως, καταλήγουμε σε άτοπο, άρα η $\leq_Q$ είναι μεταβατική στο Q.

Άρα, η $\leq_Q$ είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική στο Q, οπότε αποτελεί μερική διάταξη του Q. □

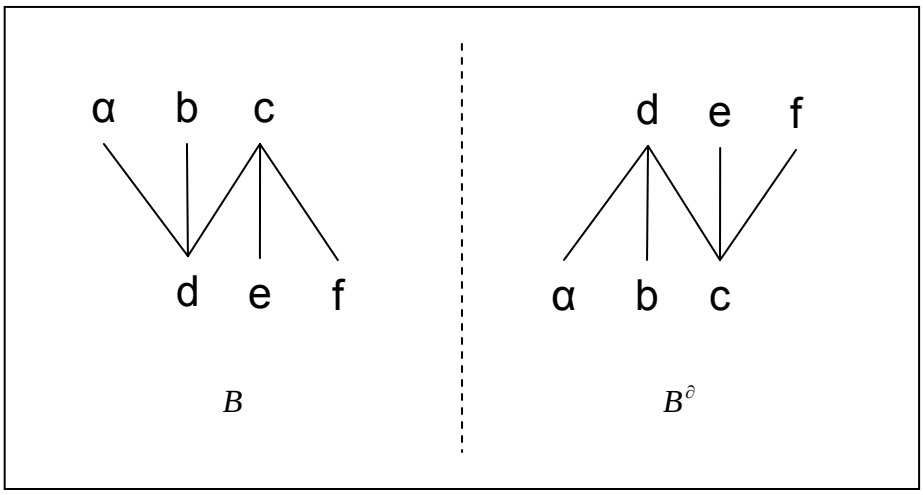
2.1.2 Κατασκευή Νέων Μερικών Διατάξεων - Τελεστές

Δεδομένου ενός ή περισσοτέρων μερικώς διατεταγμένων συνόλων, είναι δυνατή η κατασκευή νέων μερικώς διατεταγμένων συνόλων, χρησιμοποιώντας κατάλληλους κατασκευαστές διατάξεων:

Ορισμός 2.9: *Έστω P ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς $\leq_P$ και $\leq_{P^\partial}$ μια μερική διάταξη πάνω στα στοιχεία του P, τέτοια ώστε $\forall x, y \in P$, $x \leq_{P^\partial} y$ άνν $y \leq_P x$. Τότε, το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του P και διατάσσεται μερικώς ως προς $\leq_{P^\partial}$, ονομάζεται δυϊκό σύνολο του P και συμβολίζεται ως P^∂.*□

Το δυϊκό σύνολο P^∂ ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου P έχει ακριβώς την *αντίστροφη σημασιολογία διάταξης* σε σχέση με το P. Με βάση το γεγονός αυτό, στις περιπτώσεις που το P είναι πεπερασμένο, το διάγραμμα Hasse του P^∂ αντιστοιχεί στο «αναποδογυρισμένο» διάγραμμα Hasse του P:

Παράδειγμα 2.3: Έστω $B=\{a,b,c,d,e,f\}$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς $\leq_B$, όπου $d\leq_B a$, $d\leq_B b$, $d\leq_B c$, $e\leq_B c$ και $f\leq_B c$. Η Εικόνα 2.3 παρουσιάζει τα διαγράμματα Hasse του B και του B^∂, όπου εύκολα παρατηρούμε ότι το διάγραμμα του B^∂ ισοδυναμεί με το διάγραμμα του B γυρισμένο ανάποδα. □



Εικόνα 2.3 - Τα διαγράμματα Hasse των B και B^∂

Οι παρακάτω δύο ορισμοί αφορούν τη θεμελίωση μερικών διατάξεων πάνω σε γινόμενα μερικώς διατεταγμένων συνόλων:

Ορισμός 2.10: *Έστω $P_1,...,P_n$ μερικώς διατεταγμένα σύνολα ως προς $\leq_{P_1},...,\leq_{P_n}$ αντίστοιχα. Τότε, η δυαδική σχέση $\leq_{P_1\times\cdots\times P_n}$ πάνω στα στοιχεία του καρτεσιανού γινομένου $P_1\times\cdots\times P_n$, για την οποία $\forall(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)\in P_1\times\cdots\times P_n$, $(x_1,...,x_n)\leq_{P_1\times\cdots\times P_n}(y_1,...,y_n)$ άνν $\forall i\in\{1,...,n\}$, $x_i\leq_{P_i} y_i$, ονομάζεται διάταξη μέσω συντεταγμένων (coordinatewise order) των $P_1,...,P_n$ και αποτελεί μερική διάταξη του $P_1\times\cdots\times P_n$.*□

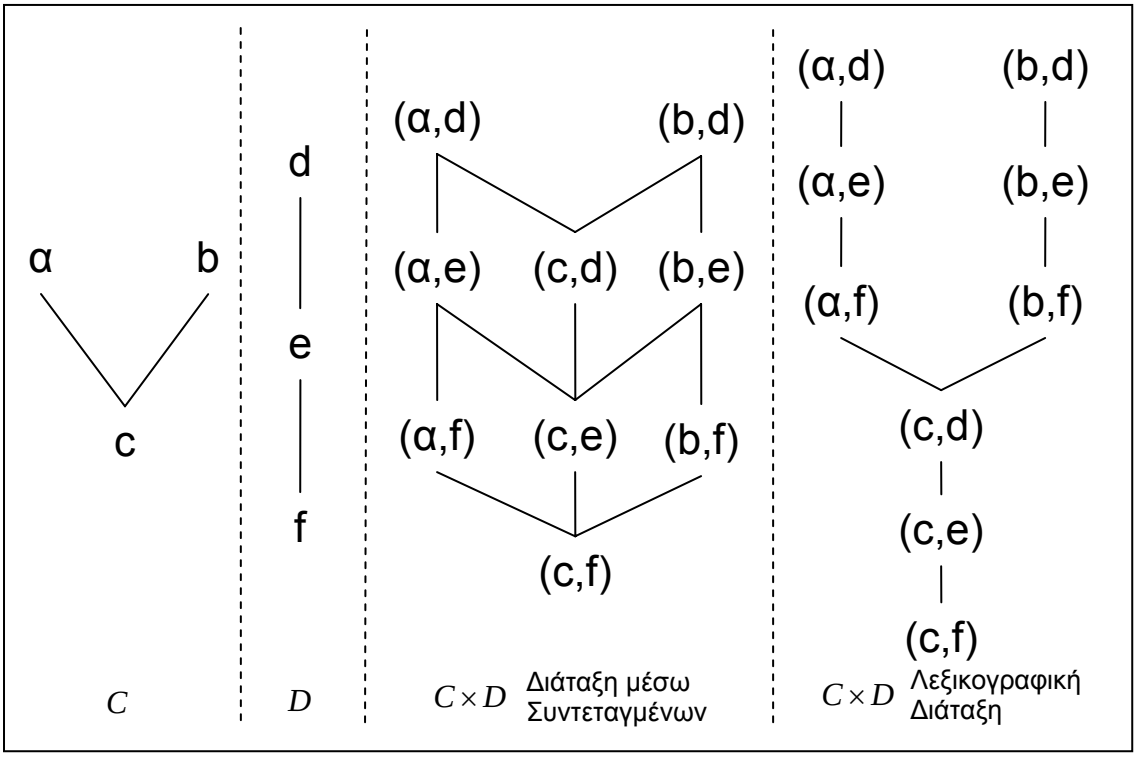
Ορισμός 2.11: *Έστω P και Q δύο μερικώς διατεταγμένα σύνολα ως προς $\leq_P$ και $\leq_Q$ αντίστοιχα. Τότε, η δυαδική σχέση $\leq_{P\times Q}$ πάνω στα στοιχεία του καρτεσιανού γινομένου $P\times Q$ για την οποία $\forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in P\times Q$,*

$(x_1, x_2) \leq_{P\times Q} (y_1, y_2)$ άνν ($x_1 \neq y_1$ και $x_1 \leq_P y_1$) ή ($x_1 = y_1$ και $x_2 \leq_Q y_2$), ονομάζεται λεξικογραφική διάταξη (lexicographic order) των P, Q και αποτελεί μερική διάταξη του $P \times Q$. □

Απ' ότι βλέπουμε, με την επαναληπτική χρήση της λεξικογραφικής διάταξης μπορούμε να κατασκευάσουμε *μόνο* γινόμενα ενός πεπερασμένου αριθμού μερικώς διατεταγμένων συνόλων, ενώ η διάταξη μέσω συντεταγμένων έχει εξ' ορισμού τη δυνατότητα κατασκευής γινομένων από ένα μη-πεπερασμένο σύνολο μερικώς διατεταγμένων συνόλων.

Σε περίπτωση που τα παραπάνω γινόμενα είναι γινόμενα ενός πεπερασμένου πλήθους μερικώς διατεταγμένων συνόλων, τότε και αυτά αποτελούν μερικώς διατεταγμένα και πεπερασμένα σύνολα. Το διάγραμμα Hasse που τα αναπαριστά, προκύπτει διαισθητικά από τον συνδυασμό των διαγραμμάτων Hasse των επιμέρους συνόλων που τα συνιστούν. Π.χ., τα διαγράμματα γινομένων δύο μερικώς διατεταγμένων και πεπερασμένων συνόλων αντιστοιχούν στην αντικατάσταση κάθε κόμβου του διαγράμματος του πρώτου συνόλου με «αντίγραφο» του διαγράμματος του δεύτερου συνόλου και την μετέπειτα σύνδεση των κόμβων, ανάλογα με τη μερική διάταξη που χρησιμοποιείται (διάταξη μέσω συντεταγμένων ή λεξικογραφική). Για να γίνει αυτό πιο ξεκάθαρο, δίνουμε ένα ενδεικτικό παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.4: Έστω $C = \{a, b, c\}$ και $D = \{d, e, f\}$ δύο μερικώς διατεταγμένα σύνολα ως προς $\leq_C$ και $\leq_D$ αντίστοιχα, όπου $c \leq_C a$, $c \leq_C b$, $f \leq_D e$ και $e \leq_D d$ (συνεπάγεται κι ότι $f \leq_D d$ από τις δύο τελευταίες συσχετίσεις). Τα διαγράμματα Hasse του C, του D και του $C \times D$ μερικώς διατεταγμένου ως προς τη διάταξη μέσω συντεταγμένων και τη λεξικογραφική διάταξη των C και D παρουσιάζονται στην Εικόνα 2.4, όπου η αντιστοιχία τους είναι εμφανής. □



Εικόνα 2.4 - Τα διαγράμματα Hasse των C, D και $C \times D$ με διάταξη μέσω συντεταγμένων και λεξικογραφική διάταξη

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο [9], αν $\otimes$ και $\succ$ οι τελεστές που αναπαριστούν τη διάταξη μέσω συντεταγμένων και τη λεξικογραφική διάταξη δύο μερικώς διατεταγμένων συνόλων, τότε ισχύουν τα παρακάτω:

a) Η διάταξη μέσω συντεταγμένων είναι *αντιμεταθετική (commutative)*, δηλαδή για κάθε δύο μερικώς διατεταγμένα σύνολα P και Q, έχουμε $P \otimes Q \equiv Q \otimes P$.

b) Η διάταξη μέσω συντεταγμένων είναι *προσαιτεριστική (associative)*, δηλαδή για κάθε τρία μερικώς διατεταγμένα σύνολα P, Q και R, έχουμε $(P \otimes Q) \otimes R \equiv P \otimes (Q \otimes R) \equiv P \otimes Q \otimes R$.

c) Η λεξικογραφική διάταξη *δεν είναι αντιμεταθετική*, αλλά είναι *προσαιτεριστική*, δηλαδή για κάθε τρία μερικώς διατεταγμένα σύνολα P, Q και R, έχουμε $(P \succ Q) \succ R \equiv P \succ (Q \succ R) \equiv P \succ Q \succ R$.

Εκτός από γινόμενα, η κατασκευή νέων μερικώς διατεταγμένων συνόλων μπορεί να οριστεί χρησιμοποιώντας την *ένωση* δύο συνόλων. Απαραίτητη προϋπόθεση για την κατασκευή, είναι τα δύο σύνολα να είναι ξένα μεταξύ τους (disjoint), δηλαδή αν S_1, S_2 τα δύο σύνολα, τότε $S_1 \cap S_2 = \emptyset$:

Ορισμός 2.12: *Έστω P και Q δύο σύνολα ξένα μεταξύ τους ($P \cap Q = Ø$) και μερικώς διατεταγμένα ως προς $\leq_P$ και $\leq_Q$ αντίστοιχα. Επίσης, έστω $\leq_{P \cup Q}$ μια μερική διάταξη πάνω στα στοιχεία της ένωσης $P \cup Q$ των P και Q, τέτοια ώστε $\forall x, y \in P \cup Q$, $x \leq_{P \cup Q} y$ άνν ($x, y \in P$ και $x \leq_P y$) ή ($x, y \in Q$ και $x \leq_Q y$). Τότε, το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του $P \cup Q$ και διατάσσεται μερικώς ως προς $\leq_{P \cup Q}$, ονομάζεται ξένη ένωση (disjoint union) των P, Q και συμβολίζεται ως $P \bigcup Q$.* □

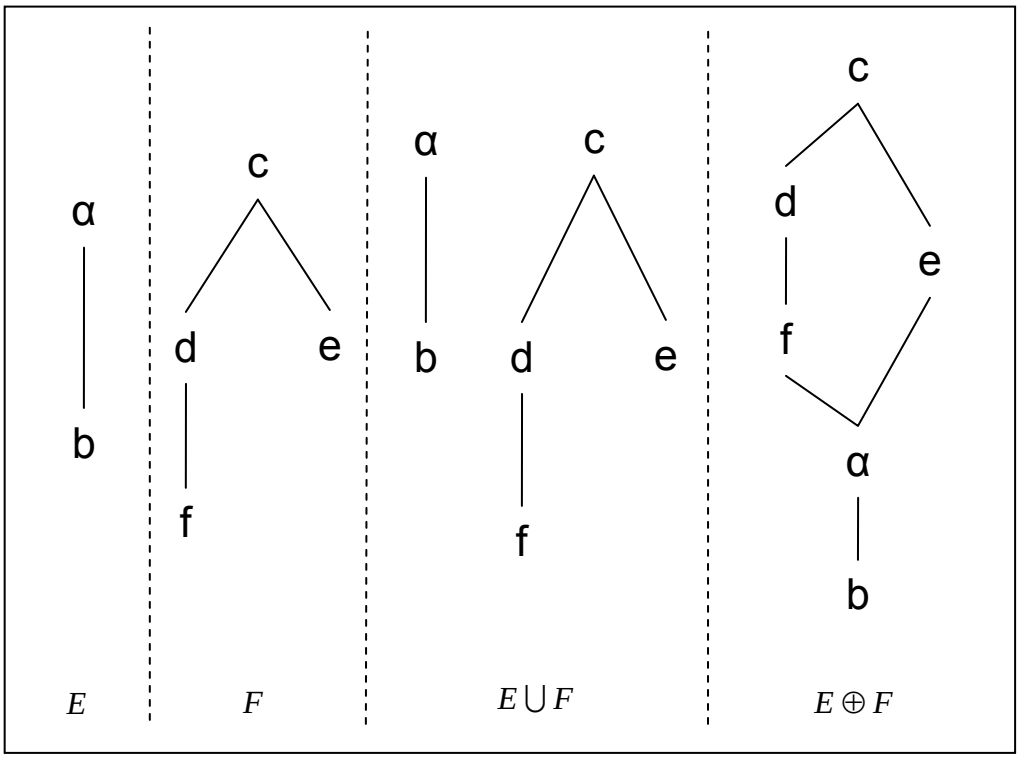
Ορισμός 2.13: *Έστω P και Q δύο σύνολα ξένα μεταξύ τους ($P \cap Q = Ø$) και μερικώς διατεταγμένα ως προς $\leq_P$ και $\leq_Q$ αντίστοιχα. Επίσης, έστω $\leq_{P \oplus Q}$ μια μερική διάταξη πάνω στα στοιχεία της ένωσης $P \cup Q$ των P και Q, τέτοια ώστε $\forall x, y \in P \cup Q$, $x \leq_{P \oplus Q} y$ άνν ($x, y \in P$ και $x \leq_P y$) ή ($x, y \in Q$ και $x \leq_Q y$) ή ($x \in P$ και $y \in Q$). Τότε, το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του $P \cup Q$ και διατάσσεται μερικώς ως προς $\leq_{P \oplus Q}$, ονομάζεται γραμμικό άθροισμα (linear sum) των P, Q και συμβολίζεται ως $P \oplus Q$.* □

Απ' ότι παρατηρούμε, δύο στοιχεία που διατάσσονται μεταξύ τους στο $P \bigcup Q$, *διατάσσονται με τον ίδιο τρόπο και στο* $P \oplus Q$. Η επιπρόσθετη σημασιολογία που χαρακτηρίζει το $P \oplus Q$ σε σχέση με το $P \bigcup Q$, είναι ότι στο πρώτο διατάσσονται *και στοιχεία που δεν ανήκουν στο ίδιο σύνολο-συνιστώσα*. Π.χ., αν $x' \in P$ και $y' \in Q$, τότε από τον Ορισμό 2.13 έχουμε $x' \leq_{P \oplus Q} y'$, ενώ από τον Ορισμό 2.12 έχουμε $x' \not\leq_{P \cup Q} y'$ και $y' \not\leq_{P \cup Q} x'$.

Σε περίπτωση που τα P και Q είναι πεπερασμένα, τότε τα $P \bigcup Q$ και $P \oplus Q$ αποτελούν και αυτά μερικώς διατεταγμένα και πεπερασμένα σύνολα. Το διάγραμμα Hasse που τα αναπαριστά, προκύπτει διαισθητικά από την ένωση των διαγραμμάτων Hasse των P και Q, της οποίας, όμως, ο τρόπος διαφέρει ανάλογα με την κατασκευή που δημιουργείται. Π.χ., το διάγραμμα του $P \bigcup Q$ απορρέει από την τοποθέτηση δίπλα-δίπλα των διαγραμμάτων των P και Q, ενώ το διάγραμμα του $P \oplus Q$ από την τοποθέτηση του

διαγράμματος του Q πάνω από το διάγραμμα του P και την ένωση, μέσω ανοδικής ακμής, κάθε μέγιστου στοιχείου του P με κάθε ελάχιστο στοιχείο του Q. Για να γίνει αυτό πιο ξεκάθαρο, δίνουμε ένα ενδεικτικό παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.5: Έστω $E=\{a,b\}$ και $F=\{c,d,e,f\}$, με $E\cap F=$ Ø, δύο μερικώς διατεταγμένα σύνολα ως προς $\leq_E$ και $\leq_F$ αντίστοιχα, όπου $b\leq_E a$, $e\leq_F c$, $d\leq_F c$ και $f\leq_F d$ (συνεπάγεται κι ότι $f\leq_F c$ από τις δύο τελευταίες συσχετίσεις). Τα διαγράμματα Hasse του E, του F, του $E\cup F$ και του $E\oplus F$ παρουσιάζονται στην Εικόνα 2.5, όπου η αντιστοιχία τους είναι προφανής.□



Εικόνα 2.5 - Τα διαγράμματα Hasse των E, F, $E\cup F$ και $E\oplus F$

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο [9], για την ξένη ένωση και το γραμμικό άθροισμα δύο ξένων μεταξύ τους και μερικώς διατεταγμένων συνόλων, ισχύουν τα παρακάτω:

a) Η ξένη ένωση είναι *αντιμεταθετική*, δηλαδή για κάθε δύο ξένα μεταξύ τους και μερικώς διατεταγμένα σύνολα P και Q, έχουμε $P\cup Q\equiv Q\cup P$.

b) Η ξένη ένωση είναι *προσαιτεριστική*, δηλαδή για κάθε τρία μερικώς διατεταγμένα σύνολα P, Q και R, τα οποία είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους, έχουμε $(P \bigcup Q) \bigcup R \equiv P \bigcup (Q \bigcup R) \equiv P \bigcup Q \bigcup R$.

c) Το γραμμικό άθροισμα είναι *προσαιτεριστικό*, δηλαδή για κάθε τρία μερικώς διατεταγμένα σύνολα P, Q και R, τα οποία είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους, έχουμε $(P \oplus Q) \oplus R \equiv P \oplus (Q \oplus R) \equiv P \oplus Q \oplus R$.

Δύο τελευταίες ενδιαφέρουσες κατασκευές ενός νέου μερικώς διατεταγμένου συνόλου από ένα ήδη υπάρχον, σχετίζονται με την έννοια του *δυναμοσυνόλου (powerset)* ενός συνόλου:

Ορισμός 2.14: *Έστω σύνολο P. Τότε, το σύνολο των υποσυνόλων του P αποτελεί το δυναμοσύνολο (powerset) του P και συμβολίζεται ως $\wp(P)$.*□

Π.χ., αν $P = \{a,b,c\}$, τότε $\wp(P) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$. Όπως παρατηρούμε, μέσω του Ορισμού 2.14, αν το P περιέχει n στοιχεία, τότε το $\wp(P)$ αποτελείται από 2^n στοιχεία.

Δεδομένου, τώρα, ενός συνόλου P διατεταγμένου ως προς μια μερική διάταξη $\leq_P$, μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο νέες μερικές διατάξεις πάνω σε ένα *συγκεκριμένο γνήσιο υποσύνολο* του $\wp(P)$, σύμφωνα με τα παρακάτω θεωρήματα:

Θεώρημα 2.2: *Έστω σύνολο P μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_P$ και το σύνολο $U_P = \{W \in \wp(P) / \emptyset \mid \forall w, w' \in W$ με $w \neq w'$, να ισχύει $w \not\leq_P w'$ και $w' \not\leq_P w\} \subset \wp(P)$ (με άλλα λόγια, το U_P περιέχει τα σύνολα που ανήκουν στο $\wp(P) / \emptyset$, των οποίων τα διαφορετικά στοιχεία, αν υπάρχουν τέτοια, είναι μη-διατασσόμενα μεταξύ τους ως προς την $\leq_P$). Τότε, η δυαδική σχέση $\leq_{MaxU_P}$ πάνω στα στοιχεία-σύνολα του U_P, για την οποία $\forall Y, Z \in U_P$, $Y \leq_{MaxU_P} Z$ άνν $\forall y \in Y$, $\exists z \in Z$ τέτοιο ώστε $y \leq_P z$, αποτελεί μερική διάταξη του U_P.*□

<u>Απόδειξη</u>: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\leq_{MaxU_P}$ είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική στο U_P. Συγκεκριμένα:

a) Έστω ότι η $\leq_{MaxU_P}$ *δεν είναι ανακλαστική* στο U_P που σημαίνει ότι $\exists X = \{x_1,...,x_n\} \in U_P$, με $n \geq 1$, τέτοιο ώστε $X \not\leq_{MaxU_P} X$, δηλαδή $\exists x_i \in X$, όπου $i \in \{1,...,n\}$, τέτοιο ώστε $\neg\exists v \in X$, για το οποίο να ισχύει $x_i \leq_P v$. Εφόσον $X \in U_P \subset \wp(P)$, τότε $\forall j \in \{1,...,n\}$, $x_j \in P$. Επίσης, η $\leq_P$ είναι ανακλαστική στο P (ως μερική διάταξη του P), οπότε $\forall j \in \{1,...,n\}$, $x_j \leq_P x_j$. Άρα, για $j = i$, έχουμε $x_i \leq_P x_i$, οπότε $\exists v \in X$ (συγκεκριμένα το $v = x_i$), τέτοιο ώστε $x_i \leq_P v$, γεγονός που αναιρεί την αρχική μας υπόθεση. Άρα, οδηγούμαστε σε άτοπο, επομένως η $\leq_{MaxU_P}$ είναι ανακλαστική στο U_P.

b) Έστω ότι η $\leq_{MaxU_P}$ *δεν είναι αντισυμμετρική* στο U_P, δηλαδή $\exists A = \{a_1,...,a_n\}, B = \{b_1,...,b_m\} \in U_P$, με $n \geq 1$ και $m \geq 1$, τέτοια ώστε $A \leq_{MaxU_P} B$, $B \leq_{MaxU_P} A$ και $A \neq B$. Εφόσον $A \leq_{MaxU_P} B$, $\forall i \in \{1,...,n\}$, $\exists j \in \{1,...,m\}$, τέτοιο ώστε $a_i \leq_P b_j$ (1). Επίσης, καθώς $B \leq_{MaxU_P} A$, $\forall k \in \{1,...,m\}$, $\exists l \in \{1,...,n\}$, τέτοιο ώστε $b_k \leq_P a_l$ (2). Συνδυάζοντας την (1) με τη (2), προκύπτει ότι $\forall i \in \{1,...,n\}$, $\exists j \in \{1,...,m\}, l' \in \{1,...,n\}$, τέτοια ώστε $a_i \leq_P b_j$ και $b_j \leq_P a_{l'}$ (3). Όπως ξέρουμε, η $\leq_P$ είναι μεταβατική στο P (ως μερική διάταξη του P), οπότε από την (3) προκύπτει ότι $\forall i \in \{1,...,n\}$, $\exists l' \in \{1,...,n\}$, τέτοιο ώστε $a_i \leq_P a_{l'}$ (4). Εφόσον $A \in U_P$, από τον ορισμό του συνόλου U_P έχουμε ότι $\forall q, r \in \{1,...,n\}$ με $q \neq r$, $a_q \not\leq_P a_r$ και $a_r \not\leq_P a_q$, άρα στην (4), $a_i \leq_P a_{l'}$ *μόνο όταν* $\forall i \in \{1,...,n\}$, $l' = i$. Με βάση το γεγονός αυτό, από την (3) προκύπτει ότι $\forall i \in \{1,...,n\}$, $\exists j \in \{1,...,m\}$, τέτοιο ώστε $a_i \leq_P b_j$ και $b_j \leq_P a_i$ (5). Ωστόσο, η $\leq_P$ είναι αντισυμμετρική στο P (ως μερική διάταξη του P), οπότε από την (5) έχουμε ότι $\forall i \in \{1,...,n\}$, $\exists j \in \{1,...,m\}$, τέτοιο ώστε $a_i = b_j$, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $A \subseteq B$ (6). Συνδυάζοντας, τώρα, τη (2) με την (1), προκύπτει ότι $\forall k \in \{1,...,m\}$, $\exists l \in \{1,...,n\}, j' \in \{1,...,m\}$, τέτοια ώστε $b_k \leq_P a_l$ και $a_l \leq_P b_{j'}$ (7), από

την οποία πρόταση, μέσω της μεταβατικότητας της $\leq_P$ στο P, έχουμε ότι $\forall k \in \{1,...,m\}$, $\exists j' \in \{1,...,m\}$, τέτοιο ώστε $b_k \leq_P b_{j'}$ (8). Καθώς $B \in U_P$, από τον ορισμό του συνόλου U_P προκύπτει ότι $\forall s,t \in \{1,...,m\}$ με $s \neq t$, $b_s \not\leq_P b_t$ και $b_t \not\leq_P b_s$, οπότε στην (8), $b_k \leq_P b_{j'}$ *μόνο όταν* $\forall k \in \{1,...,m\}$, $j' = k$. Δεδομένου αυτού του γεγονότος, από την (7) προκύπτει ότι $\forall k \in \{1,...,m\}$, $\exists l \in \{1,...,n\}$, τέτοιο ώστε $b_k \leq_P a_l$ και $a_l \leq_P b_k$ (9). Λόγω της αντισυμμετρικότητας της $\leq_P$ στο P, από την (9) έχουμε ότι $\forall k \in \{1,...,m\}$, $\exists l \in \{1,...,n\}$, τέτοιο ώστε $b_k = a_l$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $B \subseteq A$ (10). Συνδυάζοντας την (6) με την (10), παίρνουμε τελικά ότι $A = B$, πρόταση η οποία αναιρεί την αρχική μας υπόθεση ($A \neq B$). Άρα, οδηγούμαστε σε άτοπο, επομένως η $\leq_{MaxU_P}$ είναι αντισυμμετρική στο U_P.

c) Έστω ότι η $\leq_{MaxU_P}$ *δεν είναι μεταβατική* στο U_P, δηλαδή $\exists C = \{c_1,...,c_n\}, D = \{d_1,...,d_m\}, E = \{e_1,...,e_q\} \in U_P$, με $n \geq 1$, $m \geq 1$ και $q \geq 1$, τέτοια ώστε $C \leq_{MaxU_P} D$, $D \leq_{MaxU_P} E$ και $C \not\leq_{MaxU_P} E$. Εφόσον $C \leq_{MaxU_P} D$, $\forall i \in \{1,...,n\}$, $\exists j \in \{1,...,m\}$, τέτοιο ώστε $c_i \leq_P d_j$ (11). Επίσης, καθώς $D \leq_{MaxU_P} E$, $\forall k \in \{1,...,m\}$, $\exists l \in \{1,...,q\}$, τέτοιο ώστε $d_k \leq_P e_l$ (12). Συνδυάζοντας την (11) με τη (12), προκύπτει ότι $\forall i \in \{1,...,n\}$, $\exists j \in \{1,...,m\}, l' \in \{1,...,q\}$, τέτοια ώστε $c_i \leq_P d_j$ και $d_j \leq_P e_{l'}$ (13). Όπως ξέρουμε, η $\leq_P$ είναι μεταβατική στο P (ως μερική διάταξη του P), οπότε από την (13) προκύπτει ότι $\forall i \in \{1,...,n\}$, $\exists l' \in \{1,...,q\}$, τέτοιο ώστε $c_i \leq_P e_{l'}$, άρα, μέσω του ορισμού της $\leq_{MaxU_P}$, συμπεραίνουμε ότι $C \leq_{MaxU_P} E$ (14). Απ' ότι βλέπουμε, η (14) αναιρεί την αρχική μας υπόθεση ($C \not\leq_{MaxU_P} E$), οπότε οδηγούμαστε σε άτοπο, επομένως η $\leq_{MaxU_P}$ είναι μεταβατική στο U_P.

Άρα, η $\leq_{MaxU_P}$, ως ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική στο U_P, αποτελεί μερική διάταξη του U_P. □

Θεώρημα 2.3: *Έστω σύνολο P μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_P$ και ξανά το σύνολο $U_P = \{W \in \wp(P) / \emptyset | \forall w, w' \in W$ με $w \neq w'$, να ισχύει $w \not\leq_P w'$ και $w' \not\leq_P w\} \subset \wp(P)$. Τότε, η δυαδική σχέση $\leq_{MinU_P}$ πάνω στα στοιχεία-σύνολα του U_P, για την οποία $\forall Y, Z \in U_P$, $Y \leq_{MinU_P} Z$ άνν $\forall z \in Z$, $\exists y \in Y$ τέτοιο ώστε $y \leq_P z$, αποτελεί μερική διάταξη του U_P.*□

<u>Απόδειξη</u>: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\leq_{MinU_P}$ είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική στο U_P. Συγκεκριμένα:

a) Έστω ότι η $\leq_{MinU_P}$ *δεν είναι ανακλαστική* στο U_P που σημαίνει ότι $\exists X = \{x_1, ..., x_n\} \in U_P$, με $n \geq 1$, τέτοιο ώστε $X \not\leq_{MinU_P} X$, δηλαδή $\exists x_i \in X$, όπου $i \in \{1, ..., n\}$, τέτοιο ώστε $\neg \exists v \in X$, για το οποίο να ισχύει $v \leq_P x_i$. Εφόσον $X \in U_P \subset \wp(P)$, τότε $\forall j \in \{1, ..., n\}$, $x_j \in P$. Επίσης, η $\leq_P$ είναι ανακλαστική στο P (ως μερική διάταξη του P), οπότε $\forall j \in \{1, ..., n\}$, $x_j \leq_P x_j$. Άρα, για $j = i$, έχουμε $x_i \leq_P x_i$, οπότε $\exists v \in X$ (συγκεκριμένα το $v = x_i$), τέτοιο ώστε $v \leq_P x_i$, γεγονός που αναιρεί την αρχική μας υπόθεση. Άρα, οδηγούμαστε σε άτοπο, επομένως η $\leq_{MinU_P}$ είναι ανακλαστική στο U_P.

b) Έστω ότι η $\leq_{MinU_P}$ *δεν είναι αντισυμμετρική* στο U_P, δηλαδή $\exists A = \{a_1, ..., a_n\}, B = \{b_1, ..., b_m\} \in U_P$, με $n \geq 1$ και $m \geq 1$, τέτοια ώστε $A \leq_{MinU_P} B$, $B \leq_{MinU_P} A$ και $A \neq B$. Εφόσον $A \leq_{MinU_P} B$, $\forall j \in \{1, ..., m\}$, $\exists i \in \{1, ..., n\}$, τέτοιο ώστε $a_i \leq_P b_j$ (1). Επίσης, καθώς $B \leq_{MinU_P} A$, $\forall l \in \{1, ..., n\}$, $\exists k \in \{1, ..., m\}$, τέτοιο ώστε $b_k \leq_P a_l$ (2). Συνδυάζοντας την (1) με τη (2), προκύπτει ότι $\forall j \in \{1, ..., m\}$, $\exists i \in \{1, ..., n\}, k' \in \{1, ..., m\}$, τέτοια ώστε $a_i \leq_P b_j$ και $b_{k'} \leq_P a_i$ (3). Όπως ξέρουμε, η $\leq_P$ είναι μεταβατική στο P (ως μερική διάταξη του P), οπότε από την (3) προκύπτει ότι $\forall j \in \{1, ..., m\}$,

$\exists k' \in \{1,...,m\}$, τέτοιο ώστε $b_{k'} \leq_P b_j$ (4). Εφόσον $B \in U_P$, από τον ορισμό του συνόλου U_P έχουμε ότι $\forall q, r \in \{1,...,m\}$ με $q \neq r$, $b_q \not\leq_P b_r$ και $b_r \not\leq_P b_q$, άρα στην (4), $b_{k'} \leq_P b_j$ *μόνο όταν* $\forall j \in \{1,...,m\}$, $k' = j$. Με βάση το γεγονός αυτό, από την (3) προκύπτει ότι $\forall j \in \{1,...,m\}$, $\exists i \in \{1,...,n\}$, τέτοιο ώστε $a_i \leq_P b_j$ και $b_j \leq_P a_i$ (5). Ωστόσο, η $\leq_P$ είναι αντισυμμετρική στο P (ως μερική διάταξη του P), οπότε από την (5) έχουμε ότι $\forall j \in \{1,...,m\}$, $\exists i \in \{1,...,n\}$, τέτοιο ώστε $a_i = b_j$, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $B \subseteq A$ (6). Συνδυάζοντας, τώρα, τη (2) με την (1), προκύπτει ότι $\forall l \in \{1,...,n\}$, $\exists k \in \{1,...,m\}, i' \in \{1,...,n\}$, τέτοια ώστε $b_k \leq_P a_l$ και $a_{i'} \leq_P b_k$ (7), από την οποία πρόταση, μέσω της μεταβατικότητας της $\leq_P$ στο P, έχουμε ότι $\forall l \in \{1,...,n\}$, $\exists i' \in \{1,...,n\}$, τέτοιο ώστε $a_{i'} \leq_P a_l$ (8). Καθώς $A \in U_P$, από τον ορισμό του συνόλου U_P προκύπτει ότι $\forall s, t \in \{1,...,n\}$ με $s \neq t$, $a_s \not\leq_P a_t$ και $a_t \not\leq_P a_s$, οπότε στην (8), $a_{i'} \leq_P a_l$ *μόνο όταν* $\forall l \in \{1,...,n\}$, $i' = l$. Δεδομένου αυτού του γεγονότος, από την (7) προκύπτει ότι $\forall l \in \{1,...,n\}$, $\exists k \in \{1,...,m\}$, τέτοιο ώστε $b_k \leq_P a_l$ και $a_l \leq_P b_k$ (9). Λόγω της αντισυμμετρικότητας της $\leq_P$ στο P, από την (9) έχουμε ότι $\forall l \in \{1,...,n\}$, $\exists k \in \{1,...,m\}$, τέτοιο ώστε $b_k = a_l$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $A \subseteq B$ (10). Συνδυάζοντας την (6) με την (10), παίρνουμε τελικά ότι $A = B$, πρόταση η οποία αναιρεί την αρχική μας υπόθεση ($A \neq B$). Άρα, οδηγούμαστε σε άτοπο, επομένως η $\leq_{MinU_P}$ είναι αντισυμμετρική στο U_P.

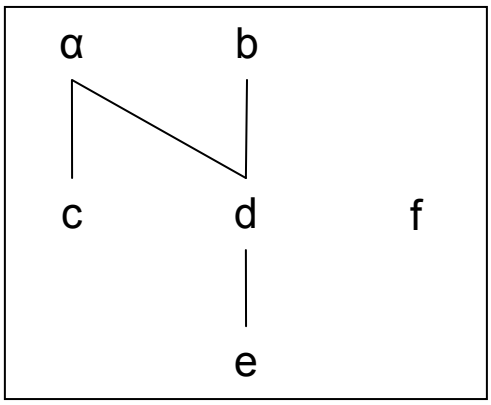
c) Έστω ότι η $\leq_{MinU_P}$ *δεν είναι μεταβατική* στο U_P, δηλαδή $\exists C = \{c_1,...,c_n\}, D = \{d_1,...,d_m\}, E = \{e_1,...,e_q\} \in U_P$, με $n \geq 1$, $m \geq 1$ και $q \geq 1$, τέτοια ώστε $C \leq_{MinU_P} D$, $D \leq_{MinU_P} E$ και $C \not\leq_{MinU_P} E$. Εφόσον $D \leq_{MinU_P} E$, $\forall j \in \{1,...,q\}$, $\exists i \in \{1,...,m\}$, τέτοιο ώστε $d_i \leq_P e_j$ (11). Επίσης, καθώς $C \leq_{MinU_P} D$, $\forall l \in \{1,...,m\}$, $\exists k \in \{1,...,n\}$, τέτοιο ώστε

$c_k \leq_P d_l$ (12). Συνδυάζοντας την (11) με τη (12), προκύπτει ότι $\forall j \in \{1,...,q\}$, $\exists i \in \{1,...,m\}, k' \in \{1,...,n\}$, τέτοια ώστε $d_i \leq_P e_j$ και $c_{k'} \leq_P d_i$ και (13). Όπως ξέρουμε, η $\leq_P$ είναι μεταβατική στο P (ως μερική διάταξη του P), οπότε από την (13) προκύπτει ότι $\forall j \in \{1,...,q\}$, $\exists k' \in \{1,...,n\}$, τέτοιο ώστε $c_{k'} \leq_P e_j$, άρα, μέσω του ορισμού της $\leq_{MinU_P}$, συμπεραίνουμε ότι $C \leq_{MinU_P} E$ (14). Απ' ότι βλέπουμε, η (14) αναιρεί την αρχική μας υπόθεση ($C \not\leq_{MinU_P} E$), οπότε οδηγούμαστε σε άτοπο, επομένως η $\leq_{MinU_P}$ είναι μεταβατική στο U_P.

Άρα, η $\leq_{MinU_P}$, ως ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική στο U_P, αποτελεί μερική διάταξη του U_P. □

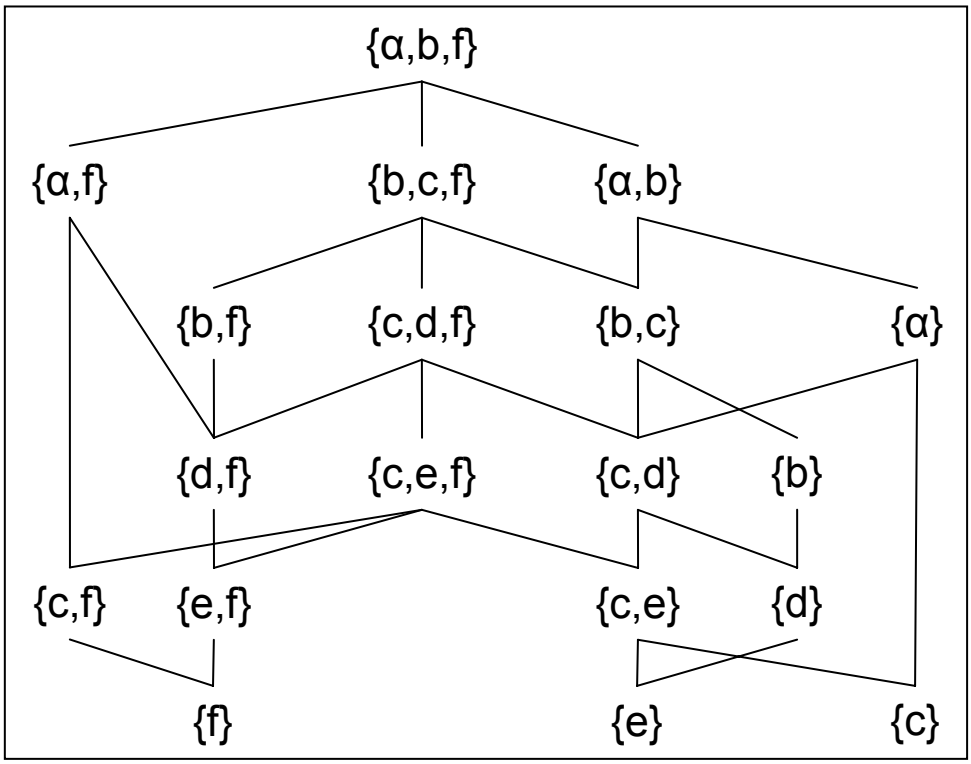
Διαισθητικά, οι μερικές διατάξεις $\leq_{MaxU_P}$ και $\leq_{MinU_P}$ *αποτελούν δύο διαφορετικές μεθόδους μετάβασης της* $\leq_P$ *από το σύνολο* P *στο σύνολο* $U_P \subset \wp(P)$, εφόσον *και στις δύο αυτές μερικές διατάξεις, η διάταξη των συνόλων που ανήκουν στο* U_P *σχετίζεται άμεσα με τον τρόπο διάταξης των στοιχείων τους μέσω της* $\leq_P$. Η διαφορά τους, έγκειται στο γεγονός ότι οι ορισμοί τους, οι οποίοι και παρουσιάζονται στα Θεωρήματα 2.2 και 2.3, *δεν είναι ισοδύναμοι*. Για να γίνει αυτό πιο ξεκάθαρο, παραθέτουμε ένα ενδεικτικό παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.6: Έστω $G = \{a, b, c, d, e, f\}$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς $\leq_G$, όπου $c \leq_G a$, $d \leq_G a$, $d \leq_G b$ και $e \leq_G d$ (από τις τρεις τελευταίες συσχετίσεις συνεπάγεται κι ότι $e \leq_G a$ και $e \leq_G b$). Το διάγραμμα Hasse του G (με βάση την $\leq_G$) παρουσιάζεται στην Εικόνα 2.6:

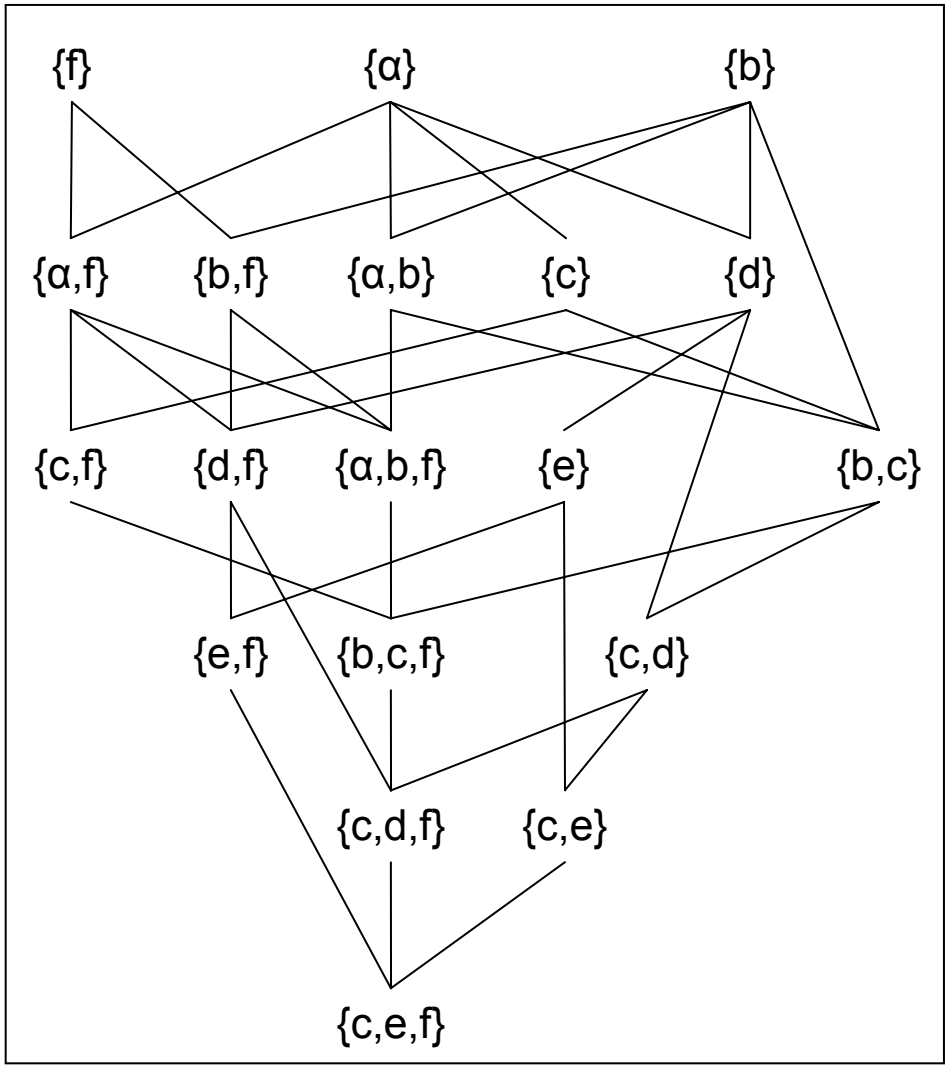


Εικόνα 2.6 - Το διάγραμμα Hasse του G (μέσω της $\leq_G$)

Μέσω των Θεωρημάτων 2.2 και 2.3, η $\leq_G$ έχει ως αποτέλεσμα δύο νέες μερικές διατάξεις $\leq_{MaxU_G}$ και $\leq_{MinU_G}$ πάνω στο σύνολο $U_G = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{a,b\}, \{a,f\}, \{b,c\}, \{b,f\}, \{c,d\}, \{c,e\}, \{c,f\}, \{d,f\}, \{e,f\}, \{a,b,f\}, \{b,c,f\}, \{c,d,f\}, \{c,e,f\}\} \subset \wp(G)$. Οι Εικόνες 2.7 και 2.8 παρουσιάζουν το διάγραμμα Hasse του U_G, μέσω των $\leq_{MaxU_G}$ και $\leq_{MinU_G}$ αντίστοιχα, όπου και στις δύο εικόνες φαίνεται αρκετά καθαρά ο ρόλος της $\leq_G$ για τη διάταξη των συνόλων του U_G.



Εικόνα 2.7 – Το διάγραμμα Hasse του U_G μέσω της $\leq_{MaxU_G}$



Εικόνα 2.8 - Το διάγραμμα Hasse του U_G μέσω της $\leq_{MinU_G}$

Απ' ότι παρατηρούμε, η διάταξη των συνόλων του U_G μέσω των $\leq_{MaxU_G}$ και $\leq_{MinU_G}$ είναι διαφορετική, όπως, επίσης, υπάρχουν σύνολα τα οποία *δεν διατάσσονται μέσω της μιας μερικής διάταξης και διατάσσονται μέσω της άλλης*. Π.χ., για τα σύνολα $\{b\},\{c,d\} \in U_G$, έχουμε $\{b\} \not\leq_{MaxU_G} \{c,d\}$ και $\{c,d\} \not\leq_{MaxU_G} \{b\}$, καθώς και $\{c,d\} \leq_{MinU_G} \{b\}$.□

2.2 Αυστηρές Μερικές Διατάξεις (Strict Partial Orders)

Εκτός από τη μερική διάταξη, η Θεωρία Διατάξεων ορίζει και άλλα είδη διατάξεων μεταξύ των στοιχείων ενός συνόλου. Ένα τέτοιο είδος είναι και η *αυστηρή μερική διάταξη*:

Ορισμός 2.15: *Έστω σύνολο P και $<_P$ μια δυαδική σχέση πάνω στα στοιχεία του P. Η σχέση $<_P$ είναι αυστηρή μερική διάταξη (strict partial order) του P, αν είναι:*

- ***Μη-ανακλαστική (Irreflexive):*** $\forall x \in P$, $x \not<_P x$ *(δηλαδή, η πρόταση $x <_P x$ δεν ισχύει)*
- ***Μη-συμμετρική (Asymmetric):*** $\forall x, y \in P$, *αν* $x <_P y$ *τότε* $y \not<_P x$ *(δηλαδή, η πρόταση $y <_P x$ δεν ισχύει)*
- ***Μεταβατική (Transitive):*** $\forall x, y, z \in P$, *αν* $x <_P y$ *και* $y <_P z$ *τότε* $x <_P z$.

Το σύνολο P ονομάζεται αυστηρά μερικώς διατεταγμένο σύνολο (strictly partial ordered set) ως προς $<_P$.□

Οι τρεις παραπάνω ιδιότητες που χαρακτηρίζουν μια αυστηρή μερική διάταξη *δεν* είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Συγκεκριμένα, έχουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 2.4: *Έστω σύνολο P και $<_P$ μια δυαδική σχέση πάνω στα στοιχεία του P. Αν η $<_P$ είναι μη-ανακλαστική και μεταβατική, τότε είναι και μη-συμμετρική.*□

Απόδειξη: Έστω ότι η $<_P$ δεν είναι μη-συμμετρική, δηλαδή $\exists x', y' \in P$ τέτοια ώστε $x' <_P y'$ και $y' <_P x'$. Τότε, λόγω της μεταβατικότητας της $<_P$ στο P, ισχύει ότι $x' <_P x'$, πράγμα που είναι άτοπο, αφού η $<_P$ είναι μη-ανακλαστική. Άρα η $<_P$ είναι μη-συμμετρική. □

Μέσω του Λήμματος 2.4, σε περιπτώσεις που πρέπει να αποδείξουμε ότι μια δυαδική σχέση είναι αυστηρή μερική διάταξη ενός συνόλου, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι μη-ανακλαστική και μεταβατική στο σύνολο αυτό.

Μια μερική διάταξη σε ένα σύνολο P ορίζει μια αντίστοιχη αυστηρή μερική διάταξη στο σύνολο αυτό, ως εξής:

Λήμμα 2.5: *Έστω σύνολο* P *και* $\leq_P$ *μια μερική διάταξη του* P. *Τότε, η δυαδική σχέση* $<_P$ *πάνω στα στοιχεία του* P *τέτοια ώστε* $\forall x, y \in P$, $x <_P y$ *άνν* $x \leq_P y$ *και* $y \not\leq_P x$, *είναι αυστηρή μερική διάταξη του* P.□

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $<_P$ είναι μη-ανακλαστική και μεταβατική στο P. Συγκεκριμένα:

a) Δεδομένου ότι η $\leq_P$ είναι ανακλαστική στο P, $\forall x \in P$ ισχύει ότι $x \leq_P x$, όπου σε συνδυασμό με την ισχύουσα ισοδυναμία $x \leq_P y \wedge y \not\leq_P x \Leftrightarrow x <_P y$ (1), προκύπτει ότι $x \not<_P x$, άρα η $<_P$ είναι μη-ανακλαστική στο P.

b) Δεδομένου ότι η $\leq_P$ είναι αντισυμμετρική στο P, $\forall x, y \in P$ με $x \neq y$ ισχύει ότι $x \leq_P y \Rightarrow y \not\leq_P x$, το οποίο, σε συνδυασμό με την (1) μας δίνει ότι $x \leq_P y \Leftrightarrow x <_P y$ (2). Επίσης, δεδομένου ότι η $\leq_P$ είναι μεταβατική στο P, $\forall x, y, z \in P$ με $x \neq y$, $x \neq z$ και $y \neq z$ ισχύει ότι $x \leq_P y \wedge y \leq_P z \Rightarrow x \leq_P z$, το οποίο, σε συνδυασμό με την (2) μας δίνει ότι $x <_P y \wedge y <_P z \Rightarrow x <_P z$, άρα η $<_P$ είναι μεταβατική στο P.

Οπότε, η $<_P$, ως μη-ανακλαστική και μεταβατική στο P, είναι και μη-συμμετρική (Λήμμα 2.4), άρα αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη του P.□

Ομοίως, μια αυστηρή μερική διάταξη σε ένα σύνολο P αντιστοιχεί σε μια μερική διάταξη στο σύνολο αυτό, μέσω του παρακάτω λήμματος:

Λήμμα 2.6: *Έστω σύνολο* P *και* $<_P$ *μια αυστηρή μερική διάταξη του* P. *Τότε, η δυαδική σχέση* $\leq_P$ *πάνω στα στοιχεία του* P *τέτοια ώστε:*

a) $\forall x \in P$, $x \leq_P x$, *και*

b) $\forall x, y \in P$ *με* $x \neq y$, $x \leq_P y$ *άνν* $x <_P y$,

είναι μια μερική διάταξη του P.□

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\leq_P$ είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική στο P. Συγκεκριμένα:

a) Εξ' ορισμού της $\leq_P$ ισχύει ότι $\forall x \in P$, $x \leq_P x$, άρα η $\leq_P$ είναι ανακλαστική στο P.

b) Δεδομένου ότι η $<_P$ είναι μη-συμμετρική στο P, $\forall x, y \in P$ με $x \neq y$ ισχύει ότι $x <_P y \Rightarrow y \not<_P x$, το οποίο, σε συνδυασμό με την ισχύουσα ισοδυναμία $x <_P y \Leftrightarrow x \leq_P y$ (1) μας δίνει ότι $x \leq_P y \Rightarrow y \not\leq_P x$. Οπότε, λόγω της ανακλαστικότητας της $\leq_P$ στο P, η μόνη περίπτωση που ισχύει ότι $x \leq_P y$ και $y \leq_P x$, είναι όταν $x = y$. Άρα, η $\leq_P$ είναι αντισυμμετρική στο P.

c) Δεδομένου ότι η $<_P$ είναι μεταβατική στο P, $\forall x, y, z \in P$ με $x \neq y$, $x \neq z$ και $y \neq z$ ισχύει ότι $x <_P y \wedge y <_P z \Rightarrow x <_P z$, το οποίο, σε συνδυασμό με την (1) μας δίνει ότι $x \leq_P y \wedge y \leq_P z \Rightarrow x \leq_P z$ (2). Οπότε, μένει να δούμε αν η (2) ισχύει και στις περιπτώσεις όπου τουλάχιστον δύο από τα x, y, z είναι ίσα μεταξύ τους:

   (i). Αν $x = y$, τότε η (2) ανάγεται στην επαγωγή $x \leq_P x \wedge x \leq_P z \Rightarrow x \leq_P z$, η οποία και ισχύει εφόσον η $\leq_P$ είναι ανακλαστική στο P.

   (ii). Αν $y = z$, τότε η (2) ανάγεται στην επαγωγή $x \leq_P y \wedge y \leq_P y \Rightarrow x \leq_P y$, η οποία και ισχύει εφόσον η $\leq_P$ είναι ανακλαστική στο P.

   (iii). Αν $x = z$, τότε η (2) ανάγεται στην επαγωγή $x \leq_P y \wedge y \leq_P x \Rightarrow x \leq_P x$ (3). Όμως, δεδομένου ότι η $\leq_P$ είναι αντισυμμετρική στο P, ισχύει ότι $x \leq_P y \wedge y \leq_P x \Rightarrow x = y$, οπότε και η (3) ανάγεται στην $x \leq_P x \wedge x \leq_P x \Rightarrow x \leq_P x$, η οποία και ισχύει.

   (iv). Αν $x = y = z$, τότε η (2) ανάγεται στην $x \leq_P x \wedge x \leq_P x \Rightarrow x \leq_P x$, η οποία και ισχύει.

   Άρα, η $\leq_P$, είναι μεταβατική στο P.

Οπότε, η $\leq_P$, ως ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική στο P, αποτελεί μερική διάταξη του P.□

Δεδομένης της αντιστοίχησης των μερικών διατάξεων σε αυστηρά μερικές διατάξεις και αντίστροφα, μέσω των Λημμάτων 2.5 και 2.6, μπορούμε να

παρατηρήσουμε ότι υπάρχει μια διαισθητική ισοδυναμία μεταξύ τους. Η μόνη διαφορά έγκειται στο ότι οι αυστηρές μερικές διατάξεις εισάγουν την έννοια της *αυστηρής ανισότητας* (strict inequality) μεταξύ των στοιχείων που διατάσσουν (γι' αυτό άλλωστε λέγονται και *αυστηρές* μερικές διατάξεις). Λόγω της ισοδυναμίας αυτής, οι ορισμοί που αναφέρθηκαν παραπάνω, οι οποίοι και αφορούσαν μερικώς διατεταγμένα σύνολα, έχουν άμεση εφαρμογή *και για αυστηρά μερικώς διατεταγμένα σύνολα*. Π.χ., το διάγραμμα Hasse μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά και για την αναπαράσταση *αυστηρά μερικώς διατεταγμένων συνόλων*, εφόσον η αυστηρή ανισότητα μεταξύ των στοιχείων που διατάσσονται δεν επηρεάζει τη σχεδίασή του.

Σε πλήρη αντιστοιχία με τη μερική διάταξη, μια αυστηρή μερική διάταξη σε ένα σύνολο χαρακτηρίζει και όλα τα υποσύνολα του συνόλου αυτού. Συγκεκριμένα, έχουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 2.7: *Έστω* P *ένα αυστηρά μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς* $<_P$. *Τότε, κάθε σύνολο* $S \subseteq P$ *είναι αυστηρά μερικώς διατεταγμένο ως προς* $<_P$.□

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι προφανής, μέσω της διατήρησης της μη-ανακλαστικότητας και της μεταβατικότητας της $<_P$ σε κάθε υποσύνολο S. Συγκεκριμένα, η $<_P$ είναι:

a) Μη-ανακλαστική στο S, δηλαδή $\forall x \in S$, $x \not<_P x$, καθότι κάθε x που ανήκει στο S ανήκει και στο P και η $<_P$ είναι μη-ανακλαστική στο P,

b) Μεταβατική στο S, δηλαδή $\forall x, y, z \in S$, αν $x <_P y$ και $y <_P z$ τότε $x <_P z$, καθότι κάθε x, y, z που ανήκουν στο S ανήκουν και στο P και η $<_P$ είναι μεταβατική στο P.

Οπότε, η $<_P$ είναι και μη-συμμετρική στο S (Λήμμα 2.4), άρα αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη του S. □

2.3 Σχέσεις Ισοδυναμίας (Equivalence Relations)

Η έννοια της ισοδυναμίας μεταξύ στοιχείων ενός συνόλου, καθορίζεται ως εξής:

Ορισμός 2.16: *Έστω σύνολο* P και $\approx_P$ *μια δυαδική σχέση πάνω στα στοιχεία του* P. *Η* $\approx_P$ *είναι σχέση ισοδυναμίας (equivalence relation) του* P, *αν είναι:*

- ***Ανακλαστική (Reflexive):*** $\forall x \in P$, $x \approx_P x$
- ***Συμμετρική (Symmetric):*** $\forall x, y \in P$, αν $x \approx_P y$ τότε $y \approx_P x$
- ***Μεταβατική (Transitive):*** $\forall x, y, z \in P$, αν $x \approx_P y$ και $y \approx_P z$ τότε $x \approx_P z$. □

Μια σχέση ισοδυναμίας $\approx_P$ σε ένα σύνολο P, *διαμερίζει* το σύνολο αυτό σε έναν αριθμό από υποσύνολα *ξένα μεταξύ τους*, τα οποία και ονομάζονται *κλάσεις ισοδυναμίας (equivalence classes)*. Το κύριο χαρακτηριστικό των κλάσεων αυτών, εκτός από το γεγονός ότι αποτελούν ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του P, είναι ότι σε κάθε μια περιέχονται στοιχεία που είναι μεταξύ τους ισοδύναμα με βάση την $\approx_P$ (δηλαδή στοιχεία που σχετίζονται μέσω της $\approx_P$). Το σύνολο όλων αυτών των κλάσεων, αποτελεί το *πηλίκο σύνολο (quotient set) του* P *ως προς* $\approx_P$, το οποίο και δηλώνεται ως $P / \approx_P$.

2.4 Προδιατάξεις (Preorders)

Ένα επίσης ενδιαφέρον είδος διάταξης που ορίζει η Θεωρία Διατάξεων μεταξύ των στοιχείων ενός συνόλου, είναι η *προδιάταξη*:

Ορισμός 2.17: *Έστω σύνολο* P και $\preceq_P$ *μια δυαδική σχέση πάνω στα στοιχεία του* P. *Η σχέση* $\preceq_P$ *είναι προδιάταξη (preorder) του* P, *αν είναι:*

- ***Ανακλαστική (Reflexive):*** $\forall x \in P$, $x \preceq_P x$,
- ***Μεταβατική (Transitive):*** $\forall x, y, z \in P$, *αν* $x \preceq_P y$ και $y \preceq_P z$ τότε $x \preceq_P z$.

Το σύνολο P *ονομάζεται προδιατεταγμένο σύνολο (preordered set) ως προς* $\preceq_P$.□

Απ' ότι παρατηρούμε, μια προδιάταξη διατάσσει με πιο χαλαρό (relaxed) τρόπο τα στοιχεία ενός συνόλου σε σχέση με μια μερική διάταξη, αφού *δεν είναι απαραίτητο* να είναι αντισυμμετρική. Επίσης, μπορούμε να διακρίνουμε ότι κάθε μερική διάταξη αποτελεί προδιάταξη, εφόσον *ικανοποιεί τις δύο ιδιότητες (ανακλαστικότητα και μεταβατικότητα) που χαρακτηρίζουν αυτό το είδος διάταξης*.

Δεδομένης μιας προδιάταξης $\preceq_P$ σε ένα σύνολο P, είναι δυνατή η κατασκευή μιας μερικής διάταξης που σχετίζεται με την $\preceq_P$, *μέσω του προσδιορισμού ισοδύναμων στοιχείων στο* P *με βάση την* $\preceq_P$. Συγκεκριμένα, έχουμε τα παρακάτω δύο θεωρήματα:

Θεώρημα 2.4: *Έστω* P *ένα προδιατεταγμένο σύνολο ως προς* $\preceq_P$*. Τότε, η δυαδική σχέση* $\approx_P$ *πάνω στα στοιχεία του* P*, τέτοια ώστε* $\forall x, y \in P$, $x \approx_P y$ *άνν* $x \preceq_P y$ *και* $y \preceq_P x$*, αποτελεί τη σχέση ισοδυναμίας του* P *με βάση την* $\preceq_P$.□

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\approx_P$ είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική στο P. Συγκεκριμένα:

a) Εφόσον η $\preceq_P$ είναι ανακλαστική στο P (ως προδιάταξη του P), $\forall x \in P$ ισχύει ότι $x \preceq_P x$ (1). Από τον ορισμό της $\approx_P$, έχουμε ότι $\forall x \in P$, $x \approx_P x \Leftrightarrow x \preceq_P x \wedge x \preceq_P x$, ή, ισοδύναμα, $x \approx_P x \Leftrightarrow x \preceq_P x$ (2). Οπότε, συνδυάζοντας τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\forall x \in P$, $x \approx_P x$, άρα η $\approx_P$ είναι ανακλαστική στο P.

b) Για να αποδείξουμε ότι η $\approx_P$ είναι συμμετρική στο P, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x, y \in P$, $x \approx_P y \Rightarrow y \approx_P x$ (3). Από τον ορισμό της $\approx_P$, έχουμε ότι $\forall x, y \in P$, $x \approx_P y \Leftrightarrow x \preceq_P y \wedge y \preceq_P x$ (4), οπότε η (3), μέσω της (4), ανάγεται στην ισοδύναμη επαγωγή $x \preceq_P y \wedge y \preceq_P x \Rightarrow y \preceq_P x \wedge x \preceq_P y$, η οποία και ισχύει $\forall x, y \in P$, άρα η $\approx_P$ είναι συμμετρική στο P.

c) Για να αποδείξουμε ότι η $\approx_P$ είναι μεταβατική στο P, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x, y, z \in P$, $x \approx_P y \wedge y \approx_P z \Rightarrow x \approx_P z$ (5). Από τον ορισμό της $\approx_P$, έχουμε ότι $\forall x, y, z \in P$, $x \approx_P y \Leftrightarrow x \preceq_P y \wedge y \preceq_P x$ (6), $y \approx_P z \Leftrightarrow y \preceq_P z \wedge z \preceq_P y$ (7) και $x \approx_P z \Leftrightarrow x \preceq_P z \wedge z \preceq_P x$ (8), οπότε η (5), μέσω των (6), (7) και (8), ανάγεται τελικά στην ισοδύναμη επαγωγή $(x \preceq_P y \wedge y \preceq_P z) \wedge (z \preceq_P y \wedge y \preceq_P x) \Rightarrow x \preceq_P z \wedge z \preceq_P x$, η οποία και ισχύει $\forall x, y, z \in P$, λόγω της μεταβατικότητας της $\preceq_P$ στο P (ως προδιάταξη του P). Άρα η $\approx_P$ είναι μεταβατική στο P.

Επομένως, η $\approx_P$, ως ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική στο P, αποτελεί σχέση ισοδυναμίας του P.□

Θεώρημα 2.5: *Έστω P ένα προδιατεταγμένο σύνολο ως προς $\preceq_P$, $\approx_P$ η σχέση ισοδυναμίας του P με βάση την $\preceq_P$ (Θεώρημα 2.4) και $Q_P = P / \approx_P$ το πηλίκο σύνολο του P ως προς $\approx_P$. Τότε, η δυαδική σχέση $\leq_{Q_P}$ πάνω στις κλάσεις ισοδυναμίας του Q_P, τέτοια ώστε $\forall \bar{x}, \bar{y} \in Q_P$, $\bar{x} \leq_{Q_P} \bar{y}$ άνν $\forall x \in \bar{x}, y \in \bar{y}$, $x \preceq_P y$, αποτελεί μερική διάταξη του Q_P, η οποία αντιστοιχεί την $\preceq_P$ στο σύνολο αυτό.*□

<u>Απόδειξη</u>: Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\leq_{Q_P}$ είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική στο Q_P. Συγκεκριμένα:

a) Έστω ότι η $\leq_{Q_P}$ *δεν είναι ανακλαστική* στο Q_P, δηλαδή ότι $\exists \bar{z} = \{z_1, ..., z_n\} \in Q_P$, με $n \geq 1$, τέτοια ώστε $\bar{z} \not\leq_{Q_P} \bar{z}$, το οποίο, από τον ορισμό της $\leq_{Q_P}$, ισοδυναμεί με το ότι $\exists i, j \in \{1, ..., n\}$, τέτοια ώστε $z_i \not\preceq_P z_j$ (η πρόταση $z_i \preceq_P z_j$ δεν ισχύει). Εφόσον $\bar{z} \in Q_P = P / \approx_P$, $\forall k, l \in \{1, ..., n\}$ ισχύει ότι $z_k \approx_P z_l$, ή, ισοδύναμα, $z_k \preceq_P z_l$ και $z_l \preceq_P z_k$ (μέσω του ορισμού της $\approx_P$ στο Θεώρημα 2.4). Με βάση το γεγονός αυτό, $\neg \exists i, j \in \{1, ..., n\}$, τέτοια ώστε $z_i \not\preceq_P z_j$, πράγμα που αναιρεί την αρχική μας υπόθεση. Επομένως, καταλήγουμε σε άτοπο, άρα η $\leq_{Q_P}$ είναι ανακλαστική στο Q_P.

b) Έστω ότι η $\leq_{Q_P}$ *δεν είναι αντισυμμετρική* στο Q_P, δηλαδή $\exists \bar{a} = \{a_1,...,a_n\}, \bar{b} = \{b_1,...,b_m\} \in Q_P$, με $n \geq 1$ και $m \geq 1$, τέτοιες ώστε $\bar{a} \leq_{Q_P} \bar{b}$, $\bar{b} \leq_{Q_P} \bar{a}$ και $\bar{a} \neq \bar{b}$ (κατά συνέπεια ισχύει κι ότι $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$, εφόσον οι $\bar{a}$ και $\bar{b}$ αποτελούν *ξεχωριστές* κλάσεις ισοδυναμίας του Q_P). Καθώς $\bar{a} \leq_{Q_P} \bar{b}$, $\forall i \in \{1,...,n\}, j \in \{1,...,m\}$, ισχύει ότι $a_i \preceq_P b_j$ (1). Επίσης, καθώς $\bar{b} \leq_{Q_P} \bar{a}$, $\forall j \in \{1,...,m\}, i \in \{1,...,n\}$, $b_j \preceq_P a_i$ (2), άρα, από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\forall i \in \{1,...,n\}, j \in \{1,...,m\}$, $a_i \preceq_P b_j$ και $b_j \preceq_P a_i$, ή, ισοδύναμα, $a_i \approx_P b_j$ (3), μέσω του ορισμού της $\approx_P$ στο Θεώρημα 2.4. Από την (3) συμπεραίνουμε ότι τα στοιχεία $a_1,...,a_n,b_1,...,b_m$ πρέπει να ανήκουν στην *ίδια κλάση ισοδυναμίας* του Q_P, πράγμα το οποίο, εφόσον $\bar{a} = \{a_1,...,a_n\}$, $\bar{b} = \{b_1,...,b_m\}$ και $\bar{a} \neq \bar{b}$ (και κατ' επέκταση $\bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$), μπορεί να ισχύει *μόνο όταν* $\exists \bar{c} \in Q_P$, τέτοια ώστε $\bar{a} \subset \bar{c}$ και $\bar{b} \subset \bar{c}$ (4). Από την (4) προκύπτει ότι $\bar{a} \neq \bar{c}$ και $\bar{b} \neq \bar{c}$, οπότε συνυπολογίζοντας ότι $\bar{a} \neq \bar{b}$, οι $\bar{a}$, $\bar{b}$ και $\bar{c}$ αποτελούν *ξεχωριστές* κλάσεις ισοδυναμίας του Q_P, άρα $\bar{a} \cap \bar{c} = \emptyset$ και $\bar{b} \cap \bar{c} = \emptyset$ (5). Ωστόσο, από την (4) προκύπτει, επίσης, ότι $\bar{a} \cap \bar{c} = \bar{a} \neq \emptyset$ και $\bar{b} \cap \bar{c} = \bar{b} \neq \emptyset$, πρόταση η οποία αναιρεί την (5). Επομένως, οδηγούμαστε σε άτοπο, άρα η $\leq_{Q_P}$ είναι αντισυμμετρική στο Q_P.

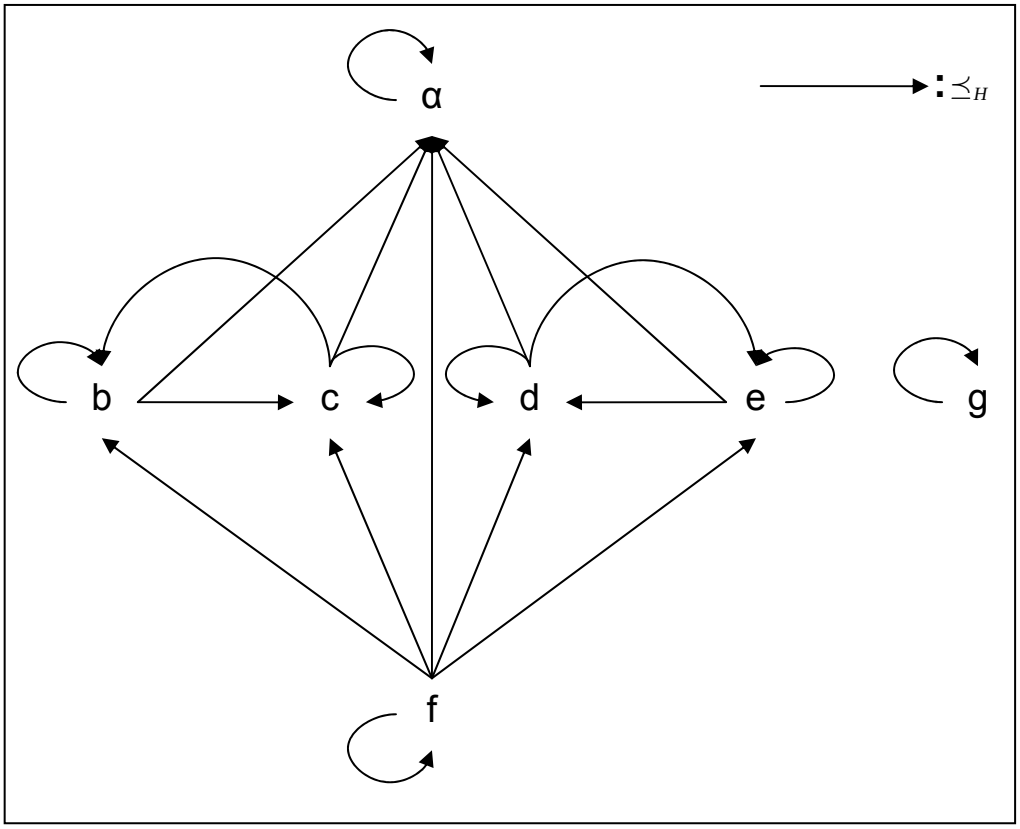
c) Έστω ότι η $\leq_{Q_P}$ *δεν είναι μεταβατική* στο Q_P, δηλαδή $\exists \bar{d} = \{d_1,...,d_n\}, \bar{e} = \{e_1,...,e_m\}, \bar{g} = \{g_1,...,g_r\} \in Q_P$, με $n \geq 1$, $m \geq 1$ και $r \geq 1$, τέτοιες ώστε $\bar{d} \leq_{Q_P} \bar{e}$, $\bar{e} \leq_{Q_P} \bar{g}$ και $\bar{d} \not\leq_{Q_P} \bar{g}$. Εφόσον $\bar{d} \leq_{Q_P} \bar{e}$, $\forall i \in \{1,...,n\}, j \in \{1,...,m\}$, $d_i \preceq_P e_j$ (6). Επίσης, καθώς $\bar{e} \leq_{Q_P} \bar{g}$, $\forall j \in \{1,...,m\}, k \in \{1,...,r\}$, $e_j \preceq_P g_r$ (7), άρα, από τις (6) και (7) προκύπτει ότι $\forall i \in \{1,...,n\}, j \in \{1,...,m\}, k \in \{1,...,r\}$, $d_i \preceq_P e_j$ και $e_j \preceq_P g_r$ (8). Όπως ξέρουμε, η $\preceq_P$ είναι μεταβατική στο P (ως προδιάταξη του P), οπότε από την (8) προκύπτει ότι $\forall i \in \{1,...,n\}, k \in \{1,...,r\}$, $d_i \preceq_P g_r$, άρα, εφόσον $\bar{d} = \{d_1,...,d_n\}$ και

$\bar{g} = \{g_1, ..., g_r\}$, μέσω του ορισμού της $\leq_{Q_P}$ συμπεραίνουμε ότι $\bar{d} \leq_{Q_P} \bar{g}$ (9). Απ' ότι βλέπουμε, η (9) αναιρεί την αρχική μας υπόθεση ($\bar{d} \not\leq_{Q_P} \bar{g}$), οπότε οδηγούμαστε σε άτοπο, επομένως η $\leq_{Q_P}$ είναι μεταβατική στο Q_P.

Άρα, η $\leq_{Q_P}$, ως ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική στο Q_P, αποτελεί μερική διάταξη του Q_P. □

Διαισθητικά, στοιχεία του P που διατάσσονται μεταξύ τους *και με τους δύο δυνατούς τρόπους* μέσω της $\preceq_P$, μπορούν να χαρακτηριστούν ως *ισοδύναμα* με βάση την $\preceq_P$. Για το λόγο αυτό, μέσω του ορισμού της $\approx_P$ στο Θεώρημα 2.4, τέτοιου είδους στοιχεία τοποθετούνται στην *ίδια κλάση ισοδυναμίας* στο $Q_P = P/\approx_P$. Η αιτία, τώρα, που οδηγούμαστε από την προδιάταξη $\preceq_P$ στο P σε μια αντίστοιχη *μερική διάταξη* $\leq_{Q_P}$ στο Q_P, έγκειται στο γεγονός ότι τα στοιχεία του P που παραβιάζουν την αντισυμμετρική ιδιότητα είναι *ισοδύναμα μεταξύ τους με βάση την* $\preceq_P$, οπότε, όπως είπαμε παραπάνω, ανήκουν και *στην ίδια κλάση ισοδυναμίας* στο Q_P. Έτσι, με τον περιορισμό των στοιχείων αυτών μέσα στην αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας που ανήκουν, καθώς και λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της $\leq_{Q_P}$ στο Θεώρημα 2.5, η αντισυμμετρικότητα της διάταξης μεταξύ των κλάσεων ισοδυναμίας του Q_P δεν παραβιάζεται *σε καμία περίπτωση*.

Παράδειγμα 2.7: Έστω $H = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ένα προδιατεταγμένο σύνολο ως προς $\preceq_H$, όπου $b \preceq_H a$, $d \preceq_H a$, $f \preceq_H b$, $f \preceq_H d$, $b \preceq_H c$, $c \preceq_H b$, $d \preceq_H e$ και $e \preceq_H d$ (από τις παραπάνω συσχετίσεις συνεπάγεται κι ότι $f \preceq_H c$, $f \preceq_H e$, $c \preceq_H a$, $e \preceq_H a$ και $f \preceq_H a$, λόγω της μεταβατικότητας της $\preceq_H$). Για να κατανοηθεί καλύτερα η «χαλαρή» διάταξη των στοιχείων του H με βάση την $\preceq_H$, η Εικόνα 2.9 απεικονίζει την $\preceq_H$ ως ένα κατευθυνόμενο γράφο (directed graph) με κόμβους τα στοιχεία του H, στον οποίο κάθε βέλος από ένα στοιχείο $y \in H$ σε ένα στοιχείο $y' \in H$ υποδηλώνει ότι $y \preceq_H y'$.

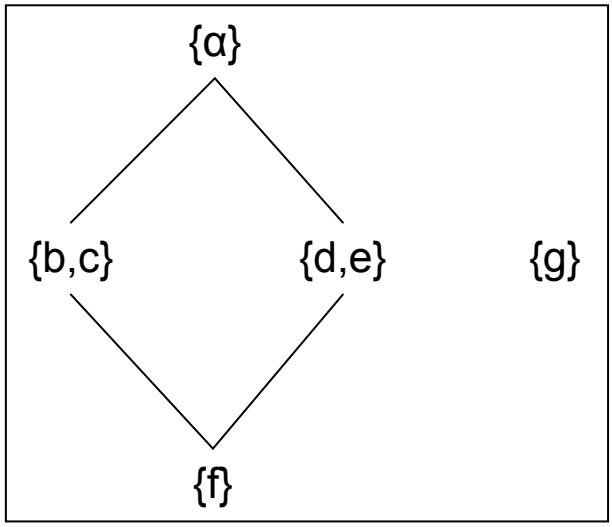


Εικόνα 2.9 – Η προδιάταξη $\preceq_H$ του H ως κατευθυνόμενος γράφος

Αν $\approx_H$ η σχέση ισοδυναμίας του H με βάση την $\preceq_H$ (Θεώρημα 2.4), έχουμε ότι $\forall x \in H$, $x \approx_H x$, μέσω της ανακλαστικότητας της $\approx_H$ στο H, οπότε κάθε στοιχείο του H είναι ισοδύναμο με τον εαυτό του με βάση την $\approx_H$. Επίσης, εφόσον $b \preceq_H c$, $c \preceq_H b$, $d \preceq_H e$ και $e \preceq_H d$, προκύπτει ότι $b \approx_H c$ και $d \approx_H e$, άρα τα στοιχεία b, c και τα στοιχεία d, e είναι μεταξύ τους ισοδύναμα με βάση την $\approx_H$. Οπότε, οι κλάσεις ισοδυναμίας που δημιουργούνται τελικά μέσω της $\approx_H$, είναι οι $\overline{h}_1 = \{a\}$, $\overline{h}_2 = \{b, c\}$, $\overline{h}_3 = \{d, e\}$, $\overline{h}_4 = \{f\}$ και $\overline{h}_5 = \{g\}$, όπου εύλογα παρατηρούμε ότι $\forall i, j \in \{1,...,5\}$ με $i \neq j$, $\overline{h}_i \cap \overline{h}_j = \emptyset$, καθώς και $\bigcup_{k=1}^{5} \overline{h}_k = H$.

Η Εικόνα 2.10 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του $Q_H = H / \approx_H = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2, \overline{h}_3, \overline{h}_4, \overline{h}_5\} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \{f\}, \{g\}\}$ μέσω της μερικής διάταξης $\leq_{Q_H}$ που αντιστοιχεί την $\preceq_H$ στο Q_H (Θεώρημα 2.5). Απ' ότι παρατηρούμε, το διάγραμμα αυτό μπορεί να αποτελέσει μια μορφή *τελικής* διάταξης των στοιχείων του H ως προς την $\preceq_H$, εφόσον περιλαμβάνει

εμμέσως όλα τα στοιχεία του H και η διάταξη μεταξύ των κλάσεων ισοδυναμίας βασίζεται, όπως είδαμε στο Θεώρημα 2.5, στη διάταξη μέσω της $\preceq_H$ των στοιχείων που περιέχουν. □



Εικόνα 2.10 - Το διάγραμμα Hasse του $Q_H = H/\approx_H$ (μέσω της $\leq_{Q_H}$)

2.5 Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάσαμε και αναλύσαμε τις κυριότερες μορφές διάταξης και ισοδυναμίας πάνω σε σύνολα αντικειμένων. Απ' ότι παρατηρήσαμε, η μαθηματική τους θεμελίωση γίνεται μέσω *δυαδικών σχέσεων* πάνω στα στοιχεία των συνόλων αυτών, οι οποίες, ανάλογα με τη διάταξη ή την ισοδυναμία που αναπαριστούν, χαρακτηρίζονται από *συγκεκριμένες ιδιότητες.* Εξειδικεύοντας περισσότερο την παρουσίασή μας στις (αυστηρές) μερικές διατάξεις, αναφερθήκαμε στο θεωρητικό υπόβαθρό τους, το οποίο συμπεριλάμβανε εξεζητημένες περιπτώσεις (σύνολο αλυσίδα, αντι-αλυσίδα), μια ευέλικτη σχηματική αναπαράσταση (διάγραμμα Hasse), τον ορισμό της διαισθητικής ισοδυναμίας μεταξύ μερικώς διατεταγμένων συνόλων (ομοιομορφισμός), καθώς και κατασκευές νέων τέτοιων συνόλων από ήδη υπάρχοντα (δυϊκό σύνολο, διάταξη μέσω συντεταγμένων, λεξικογραφική διάταξη, ξένη ένωση, γραμμικό άθροισμα, υποσύνολο δυναμοσυνόλου). Επίσης, αναλύσαμε σε μικρότερο βαθμό τις προδιατάξεις, επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον μας στη μετατροπή τους σε μερικές διατάξεις, μέσω σχέσεων

ισοδυναμίας. Δεδομένης της απαιτητικότητας που πρέπει να διακρίνει ένα πλαίσιο θεμελίωσης και αναπαράστασης προτιμήσεων, λόγω των πολλαπλών εκφράσεων και εκφάνσεων προτιμήσεων που παρατηρούνται στην καθημερινή ζωή, ένα τέτοιο «πλούσιο» υπόβαθρο αποτελεί μια ικανοποιητική λύση για τρεις κύριους λόγους:

1) Το μεγαλύτερο μέρος των δηλώσεων προτιμήσεων στην καθημερινότητα, υπακούει σε ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τις προαναφερθείσες διατάξεις (π.χ., μεταβατικότητα),
2) Η σχηματική αναπαράσταση μέσω διαγραμμάτων Hasse είναι αρκετά βοηθητική για μια συνολική εποπτεία της διάταξης και κατάταξης των αντικειμένων, και
3) Η πληθώρα κατασκευών νέων μερικώς διατεταγμένων συνόλων από ήδη υπάρχοντα σύνολα (ή, ισοδύναμα, ο ορισμός νέων μερικών διατάξεων από ήδη υπάρχουσες) δίνει αρκετή ευελιξία για την έκφραση πολύπλοκων και σύνθετων προτιμήσεων.

Κεφάλαιο 3

Προτιμήσεις και Διάταξη Αντικειμένων

Σ' αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζουμε το βασικό θεωρητικό πλαίσιο για τη διάταξη των αντικειμένων ενός συνόλου με βάση προτιμήσεις που δηλώνονται πάνω στα χαρακτηριστικά τους. Για να προσδώσουμε ένα γενικό χαρακτήρα στην προσπάθεια αυτή (δηλαδή, ανεξάρτητα του χρησιμοποιούμενου μοντέλου δεδομένων), χρησιμοποιούμε αναπαραστάσεις μέσω συναρτήσεων-χαρακτηριστικών οι οποίες *αντιστοιχούν μια το πολύ τιμή από το σύνολο άφιξής τους (codomain) σε κάθε στοιχείο του συνόλου των αντικειμένων που θέλουμε να διατάξουμε*. Με βάση το γεγονός αυτό, πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση του θεωρητικού μας πλαισίου, παραθέτουμε μια σύντομη εισαγωγή του κόσμου των συναρτήσεων.

3.1 Το Συναρτησιακό Πλαίσιο

Ορισμός 3.1: *Συνάρτηση (function) από ένα σύνολο* X *σε ένα σύνολο* Y *λέγεται μια σχέση, με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου* X *αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του* Y*.*□

Συναρτήσεις που ορίζονται με βάση τον Ορισμό 3.1 ονομάζονται *καλά-ορισμένες (well-defined)* ή *ολικές (total)* συναρτήσεις.

Δεδομένης μιας συνάρτησης f από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y ή, σε συντομογραφία, μιας συνάρτησης $f : X \to Y$, στη συνέχεια της παρουσίασης του συναρτησιακού πλαισίου θεωρούμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

a) *Αν ένα* $x \in X$ *αντιστοιχίζεται μέσω της* f *σε ένα* $y \in Y$*, τότε γράφουμε* $y = f(x)$*.*

b) *Το σύνολο* X *ονομάζεται πεδίο ορισμού (domain) της* f *και συμβολίζεται ως* $domain(f)$*.*

c) *Το σύνολο Y ονομάζεται σύνολο άφιξης (codomain) της f και συμβολίζεται ως $codomain(f)$.*

d) *Το σύνολο $R = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\} \subseteq Y$ ονομάζεται σύνολο τιμών (range) της f ή εικόνα (image) της f στο Y και συμβολίζεται ως $range(f)$* ή $f(X)$.

Στον κόσμο των μαθηματικών και των ηλεκτρονικών υπολογιστών έχουν καθιερωθεί αρκετοί ορισμοί που σχετίζονται με πιο «χαλαρές» εκδοχές την έννοιας της συνάρτησης. Ένας από αυτούς είναι και η *μερική συνάρτηση:*

Ορισμός 3.2: *Μερική συνάρτηση (partial function) από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y λέγεται μια σχέση, με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου X αντιστοιχίζεται σε ένα το πολύ στοιχείο του Y.*□

Απ' ότι βλέπουμε από τους Ορισμούς 3.1 και 3.2, μια ολική συνάρτηση αποτελεί μερική συνάρτηση, χωρίς, όμως, να συμβαίνει πάντα το αντίθετο. Ωστόσο, μπορούμε να μετατρέψουμε μια μερική συνάρτηση $f : X \to Y$ σε ολική κάνοντας τα παρακάτω βήματα:

a) Εφοδιάζοντας καθένα από τα σύνολα X και Y με ένα στοιχείο «πυθμένα» (bottom), τα οποία συμβολίζουμε ως $bottom(X)$ και $bottom(Y)$ αντίστοιχα και ερμηνεύονται ως *μη-ορισμένες τιμές .*

b) $f(bottom(X)) = bottom(Y)$, δηλαδή το στοιχείο-πυθμένας του X αντιστοιχείται μέσω της f στο στοιχείο-πυθμένα του Y (μ' αυτή την υπόθεση δεν είναι δυνατόν στοιχεία πυθμένες να απεικονίζονται σε στοιχεία μη-πυθμένες).

c) Αν ένα $x \in X$ με $x \neq bottom(X)$ δεν αντιστοιχείται σε κάποια τιμή του Y μέσω της f, τότε $f(x) = bottom(Y)$.

Όπως βλέπουμε, ο Ορισμός 3.2 αντικατοπτρίζει *πλήρως* τις συναρτήσεις-χαρακτηριστικά του πλαισίου μας, άρα οι συναρτήσεις αυτές αποτελούν *μερικές συναρτήσεις*. Με βάση το γεγονός αυτό, στη συνέχεια της αναφοράς μας, όπου γίνεται λόγος για συναρτήσεις, εννοούμε *μερικές* συναρτήσεις και χειριζόμαστε τις περιπτώσεις που ανακύπτουν με βάση την παραπάνω μετατροπή τους σε ολικές.

Στο πέρασμα του χρόνου, έχει προσδιοριστεί ένα αρκετά πλούσιο πλαίσιο εννοιών και πράξεων που εμπλέκουν συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα, στη δική μας προσέγγιση θα θεωρήσουμε την *συναρτησιακή άλγεβρα (functional algebra)* ([28], [29]), η οποία και αποτελείται από πράξεις (operations) που προσδίδουν ευελιξία στη διαχείριση του συναρτησιακού μοντέλου αναπαράστασης.

3.1.1 Συναρτησιακή Άλγεβρα

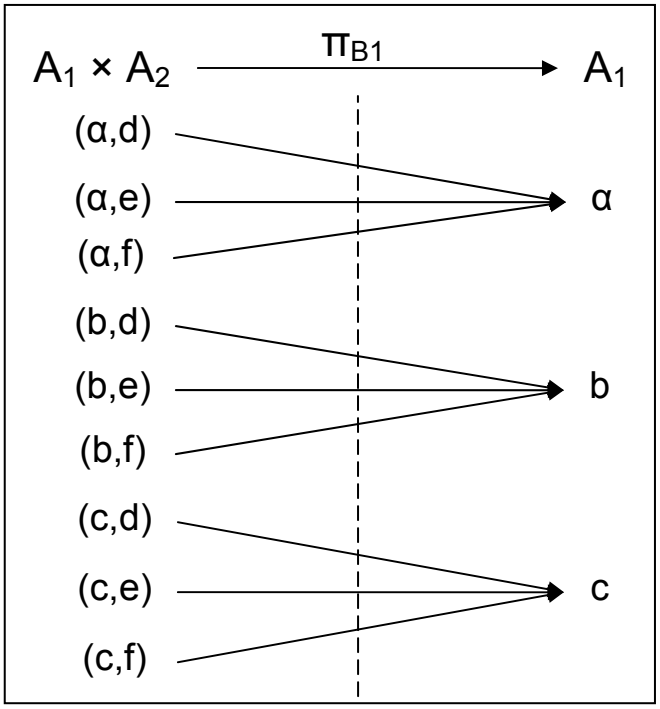
Η άλγεβρα αυτή απαρτίζεται από τέσσερις πράξεις πάνω στο συναρτησιακό πλαίσιο: (a) τη συναρτησιακή προβολή (projection), (b) τη συναρτησιακή σύνθεση (composition), (c) το συναρτησιακό ταίριασμα (pairing), και (d) το συναρτησιακό περιορισμό (restriction).

Ορισμός 3.3: *Έστω* n *σύνολα* $A_1,...,A_n$ *και το καρτεσιανό τους γινόμενο* $A_1 \times \cdots \times A_n$. *Επίσης, έστω σύνολο* $B = \{A_{j_1},...,A_{j_m}\}$, *όπου* $\forall k \in \{1,...,m\}$ *υπάρχει ξεχωριστό* $i \in \{1,...,n\}$ *τέτοιο ώστε* $j_k = i$ *(οπότε* $m \le n$ *και* $B \subseteq \{A_1,...,A_n\}$*). Τότε, η συνάρτηση* $\pi_B : A_1 \times \cdots \times A_n \to A_{j_1} \times \cdots \times A_{j_m}$, *τέτοια ώστε* $\forall (a_1,...,a_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$, $\pi_B(a_1,...,a_n) = (a_{j_1},...,a_{j_m})$, *ονομάζεται προβολή (projection) του γινομένου* $A_1 \times \cdots \times A_n$ *στο* B.□

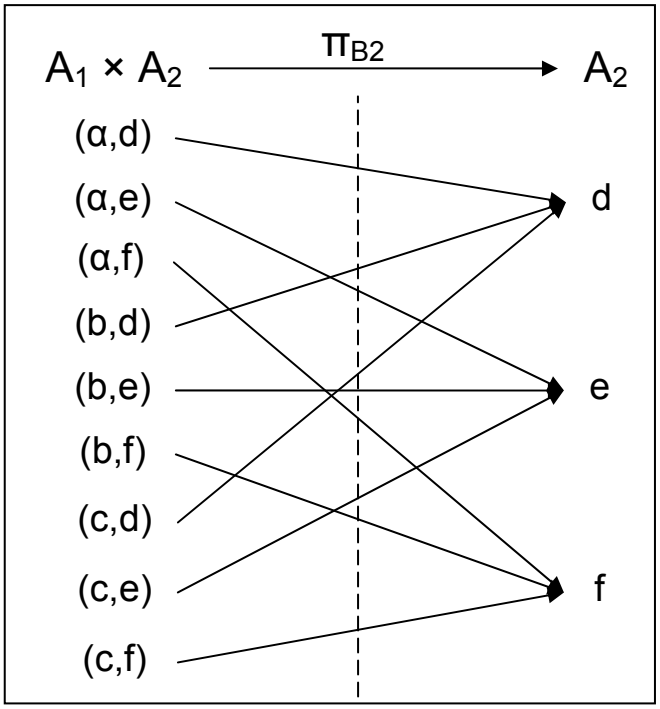
Διαισθητικά, η προβολή του καρτεσιανού γινομένου $A_1 \times \cdots \times A_n$ των συνόλων $A_1,...,A_n$ πάνω σε ένα σύνολο $B \subseteq \{A_1,...,A_n\}$, *«περιορίζει» τη διαθέσιμη πληροφορία στο σύνολο αυτό*. Επίσης, αποτελεί πάντα ολική συνάρτηση, οπότε και *δεν χρειάζεται η εφαρμογή στοιχείων-πυθμένων*. Για να γίνει αυτό πιο ξεκάθαρο, παραθέτουμε ένα απλό παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.1: Έστω τα σύνολα $A_1 = \{a,b,c\}$, $A_2 = \{d,e,f\}$ και το καρτεσιανό τους γινόμενο $A_1 \times A_2 = \{$ $\{a,d\}$, $\{a,e\}$, $\{a,f\}$, $\{b,d\}$, $\{b,e\}$, $\{b,f\}$, $\{c,d\}$, $\{c,e\}$, $\{c,f\}\}$. Οι Εικόνες 3.1, 3.2 και 3.3 παρουσιάζουν τις προβολές του $A_1 \times A_2$ στα σύνολα $B_1 = A_1 \subset \{A_1, A_2\}$, $B_2 = A_2 \subset \{A_1, A_2\}$ και $B_3 = \{A_1, A_2\}$

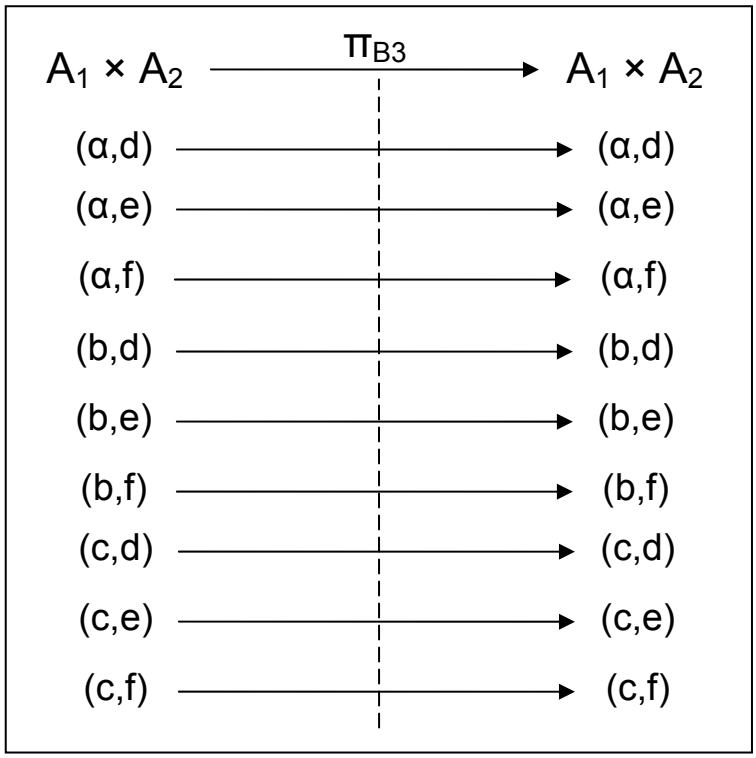
αντίστοιχα. Απ' ότι παρατηρούμε, η προβολή $\pi_{B_3} : A_1 \times A_2 \to A_1 \times A_2$ *ουσιαστικά δεν περιορίζει την πληροφορία* που περιέχεται στο $A_1 \times A_2$, εφόσον κάθε στοιχείο του $A_1 \times A_2$ αντιστοιχίζεται στον εαυτό του.□



Εικόνα 3.1 - Η συναρτησιακή προβολή $\pi_{B_1} : A_1 \times A_2 \to A_1$, όπου $B_1 = A_1$



Εικόνα 3.2 - Η συναρτησιακή προβολή $\pi_{B_2} : A_1 \times A_2 \to A_2$, όπου $B_2 = A_2$



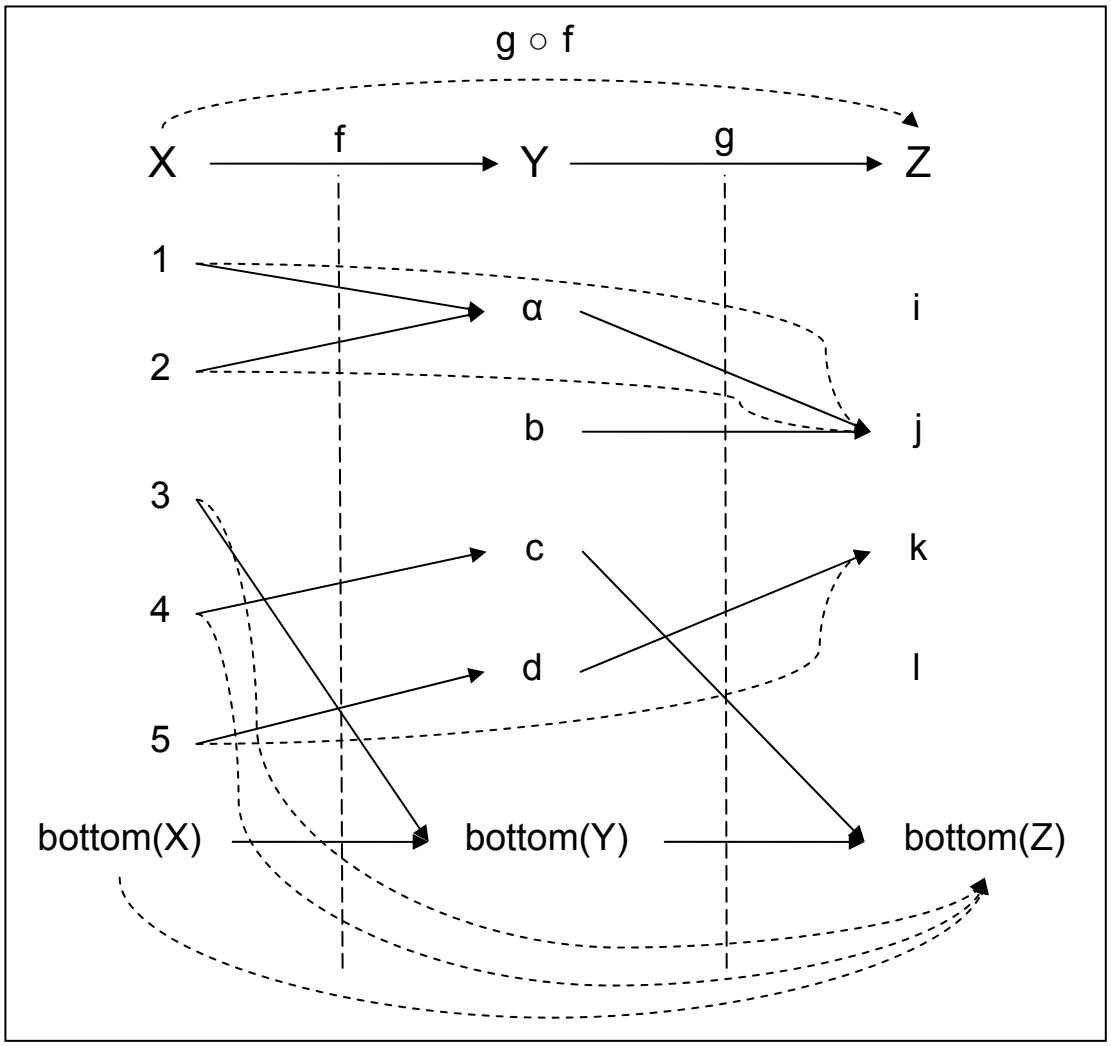
Εικόνα 3.3 - Η συναρτησιακή προβολή $\pi_{B_3} : A_1 \times A_2 \to A_1 \times A_2$, όπου $B_3 = \{A_1, A_2\}$

Ορισμός 3.4: *Έστω δύο συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$. Τότε, η συνάρτηση $h : X \to Z$, τέτοια ώστε $\forall x \in X$, $h(x) = g(f(x))$ αποτελεί τη συναρτησιακή σύνθεση (composition) των g και f και συμβολίζεται ως $g \circ f$.*□

Διαισθητικά, η συναρτησιακή σύνθεση, *συνδυάζει τις δύο συνιστώσες συναρτήσεις, οι οποίες μπορεί να μην είναι ολικές, μέσω του κοινού συνόλου που χαρακτηρίζει το πεδίο ορισμού της μιας και το σύνολο άφιξης της άλλης*, καθορίζοντας έτσι μια νέα συνάρτηση. Για να γίνει αυτό σαφέστερο, ακολουθεί ένα ενδεικτικό παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.2: Έστω τα σύνολα $X = \{1,2,3,4,5, bottom(X)\}$, $Y = \{a, b, c, d, bottom(Y)\}$ και $Z = \{i, j, k, l, bottom(Z)\}$, καθώς και οι συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$, τέτοιες ώστε $f(1) = f(2) = a$, $f(4) = c$, $f(5) = d$, $g(a) = g(b) = j$ και $g(d) = k$. Εφόσον το στοιχείο 3 και το στοιχείο c δεν

αντιστοιχίζονται σε ορισμένη τιμή του Y και του Z μέσω της f και της g αντίστοιχα, τότε $f(3) = bottom(Y)$ και $g(c) = bottom(Z)$. Επίσης, από τον ορισμό των στοιχείων-πυθμένων έχουμε ότι $f(bottom(X)) = bottom(Y)$ και $g(bottom(Y)) = bottom(Z)$. Προσδιορίζοντας την $g \circ f : X \to Z$ μέσω του Ορισμού 3.4, προκύπτει ότι $g \circ f(1) = g \circ f(2) = j$, $g \circ f(5) = k$ και $g \circ f(bottom(X)) = g \circ f(3) = g \circ f(4) = bottom(Z)$. Η Εικόνα 3.4 παρουσιάζει τις σχηματικές απεικονίσεις των f, g και $g \circ f$, από τις οποίες φαίνεται αρκετά καθαρά ο συνδυασμός των f και g για τον καθορισμό της $g \circ f$. □



Εικόνα 3.4 – Οι συναρτήσεις f, g και $g \circ f$ του Παραδείγματος 3.2

Ορισμός 3.5: *Έστω δύο συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : X \to Z$. Τότε, η συνάρτηση $h : X \to Y \times Z$, τέτοια ώστε $\forall x \in X$:*

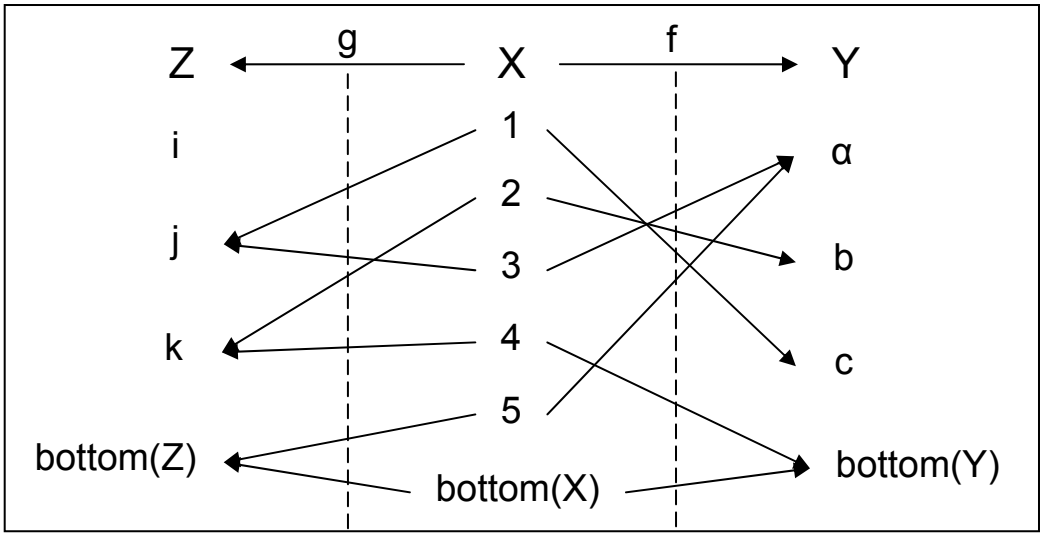
a) Αν $f(x) = bottom(Y)$ *ή* $g(x) = bottom(Z)$, *τότε* $h(x) = bottom(Y \times Z)$, *και*

b) Διαφορετικά, $h(x) =< f(x), g(x) >$,

αποτελεί το συναρτησιακό ταίριασμα (pairing) των f *και* g, *το οποίο και συμβολίζεται ως* $f \wedge g$.□

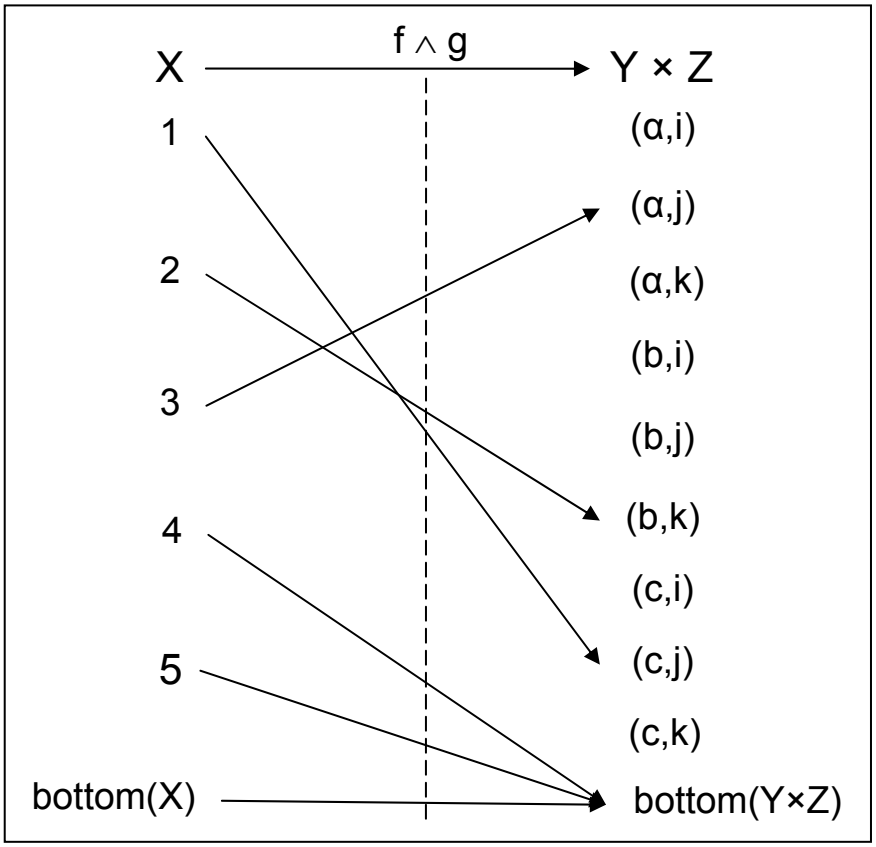
Διαισθητικά, το συναρτησιακό ταίριασμα, αν εξαιρέσουμε τα στοιχεία-πυθμένες των εκάστοτε συνόλων, *«ενώνει» τη συμπεριφορά των δύο συνιστωσών συναρτήσεων* μέσω μιας νέας συνάρτησης, η οποία έχει το ίδιο πεδίο ορισμού με τις συναρτήσεις αυτές και το σύνολο άφιξής της αποτελεί το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων άφιξής τους. Για να γίνουμε πιο σαφείς, παρακάτω παραθέτουμε ένα απλό παράδειγμα συναρτησιακού ταιριάσματος.

Παράδειγμα 3.3: Έστω τα σύνολα $X = \{1,2,3,4,5, bottom(X)\}$, $Y = \{a, b, c, bottom(Y)\}$ και $Z = \{i, j, k, bottom(Z)\}$, καθώς και οι συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : X \to Z$, τέτοιες ώστε $f(3) = f(5) = a$, $f(2) = b$, $f(1) = c$, $g(1) = g(3) = j$ και $g(2) = g(4) = k$. Εφόσον τα στοιχεία 4 και 5 δεν αντιστοιχίζονται σε ορισμένη τιμή του Y και του Z μέσω της f και της g αντίστοιχα, τότε $f(4) = bottom(Y)$, καθώς και $g(5) = bottom(Z)$. Επίσης, μέσω του ορισμού των στοιχείων-πυθμένων έχουμε ότι $f(bottom(X)) = bottom(Y)$ και $g(bottom(X)) = bottom(Z)$. Η Εικόνα 3.5 δίνει μια γραφική απεικόνιση των f και g.



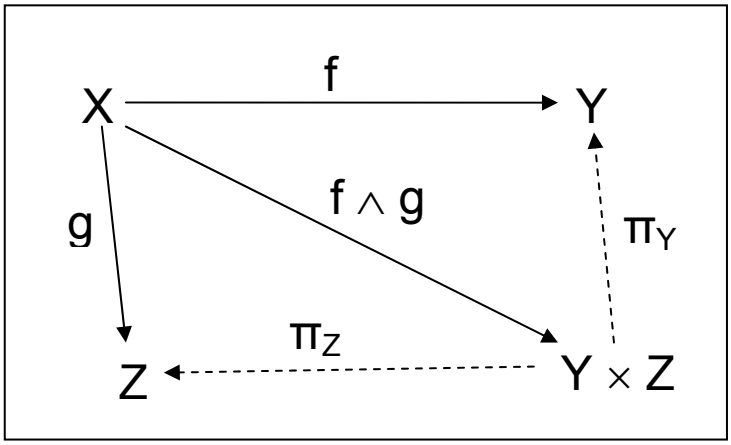
Εικόνα 3.5 - Οι συναρτήσεις f και g του Παραδείγματος 3.3

Το συναρτησιακό ταίριασμα των f και g έχει ως αποτέλεσμα τη συνάρτηση $f \wedge g : X \to Y \times Z$, της οποίας η σχηματική αναπαράσταση δίνεται στην Εικόνα 3.6. Όπως βλέπουμε, η συμπεριφορά της πάνω στο $Y \times Z$ είναι απόρροια της συμπεριφοράς της f πάνω στο Y και της g πάνω στο Z.□



Εικόνα 3.6 - Η συνάρτηση $f \wedge g$ του Παραδείγματος 3.3

Εφόσον το συναρτησιακό ταίριασμα δύο συναρτήσεων *υιοθετεί* τη συμπεριφορά τους πάνω στα σύνολα άφιξής τους, κάθε μια από αυτές μπορεί να προκύψει με την *προβολή της συνάρτησης του ταιριάσματος στο αντίστοιχο σύνολο άφιξης της κάθε συνάρτησης*. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στην Εικόνα 3.7, όπου το συναρτησιακό ταίριασμα $f \wedge g : X \to Y \times Z$ δύο συναρτήσεων $f : X \to Y$ και $g : X \to Z$ περιορίζεται στις f και g, μέσω των προβολών (Ορισμός 3.3) π_Y και π_Z του $Y \times Z$ πάνω στα αντίστοιχα σύνολα άφιξης Y και Z. Πιο συγκεκριμένα, οι παραπάνω περιορισμοί λαμβάνουν χώρα *μέσω της συναρτησιακής σύνθεσης* (Ορισμός 3.4) *της* $f \wedge g$ *με τις* π_Y *και* π_Z ($\pi_Y \circ (f \wedge g) = f$ και $\pi_Z \circ (f \wedge g) = g$)[1].



Εικόνα 3.7 – Ο περιορισμός της $f \wedge g$ πάνω στις f και g μέσω των προβολών π_Y και π_Z

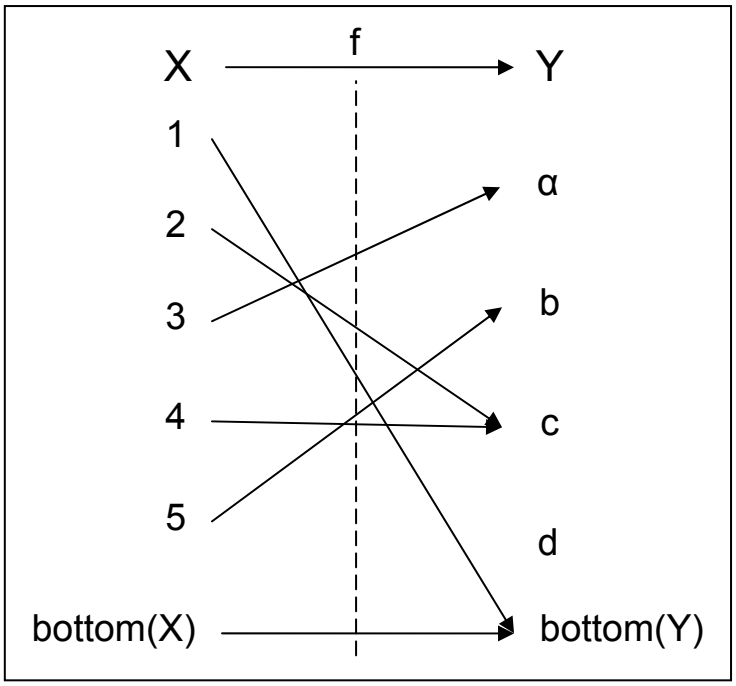
Ορισμός 3.6: *Έστω συνάρτηση $f : X \to Y$ και σύνολο $S \subseteq X$. Τότε, η συνάρτηση $h : S \to Y$, τέτοια ώστε $\forall x \in S$, $h(x) = f(x)$, αποτελεί τον συναρτησιακό περιορισμό (restriction) της f πάνω στο πεδίο ορισμού της από το σύνολο S, ο οποίος και συμβολίζεται ως $f/_S$.*□

Ουσιαστικά, ο συναρτησιακός περιορισμός $f/_S$ μιας συνάρτησης $f : X \to Y$ πάνω στο $domain(f) = X$, *υιοθετεί τη συμπεριφορά της f, απορρίπτοντας,*

[1] Εδώ, *δεν κάνουμε καμία υπόθεση για τη σχέση των συνόλων Y και Z*, τα οποία μπορεί να είναι ξένα μεταξύ τους, να είναι ίσα ή η τομή τους να είναι μη κενή.

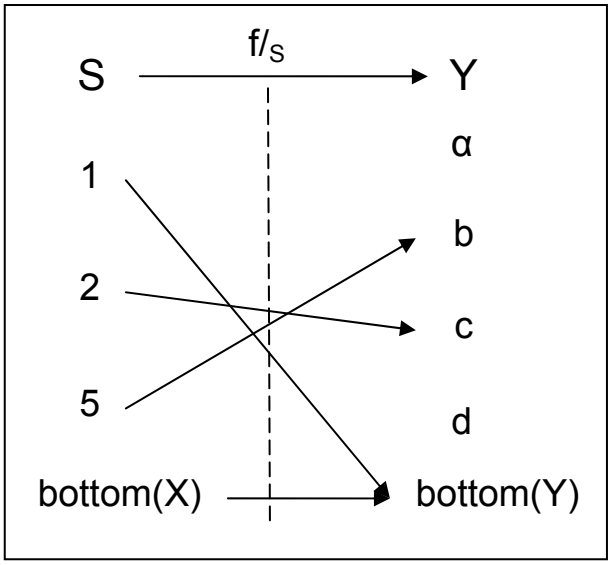
όμως, οποιαδήποτε πληροφορία δεν σχετίζεται με το S. Για να γίνει αυτό πιο ξεκάθαρο, ακολουθεί ένα ενδεικτικό παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.4: Έστω τα σύνολα $X = \{1,2,3,4,5,bottom(X)\}$ και $Y = \{a,b,c,d,bottom(Y)\}$, καθώς και η συνάρτηση $f : X \to Y$, τέτοια ώστε $f(3) = a$, $f(5) = b$ και $f(2) = f(4) = c$. Εφόσον το στοιχείο 1 δεν απεικονίζεται σε ορισμένη τιμή του Y μέσω της f, τότε $f(1) = bottom(Y)$. Η Εικόνα 3.8 παρουσιάζει μια σχηματική αναπαράσταση της f.



Εικόνα 3.8 - Η συνάρτηση f του Παραδείγματος 3.4

Ο συναρτησιακός περιορισμός $f/_S : S \to Y$ της f πάνω στο πεδίο ορισμού X από ένα σύνολο $S = \{1,2,5,bottom(X)\} \subset X$, παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.9. Απ' ότι παρατηρούμε, η $f/_S$ συμπεριφέρεται όπως ακριβώς και η f, ωστόσο $a \notin range(f/_S)$, εφόσον $f(x) = a$ μόνο για $x = 3$, και $3 \notin S$.□



Εικόνα 3.9 - Η συνάρτηση $f/_S$ του Παραδείγματος 3.4

Παρουσιάζοντας τους ορισμούς των τεσσάρων πράξεων που απαρτίζουν τη συναρτησιακή άλγεβρα, παρατηρούμε ότι αυτή χαρακτηρίζεται από την *ιδιότητα της κλειστότητας (closure property)*, εφόσον τα ορίσματα (arguments) και τα αποτελέσματα (results) των πράξεων αυτών αποτελούν *συναρτήσεις*. Με βάση το γεγονός αυτό, είναι δυνατό συνάρτηση που προκύπτει ως αποτέλεσμα μιας πράξης της συναρτησιακής άλγεβρας να χρησιμοποιηθεί ως όρισμα για την εκτέλεση περαιτέρω τέτοιων πράξεων (συμπεριλαμβανομένης και της ίδιας πράξης), εφόσον, βέβαια, ικανοποιεί τις συνθήκες που υπάρχουν στους αντίστοιχους ορισμούς.

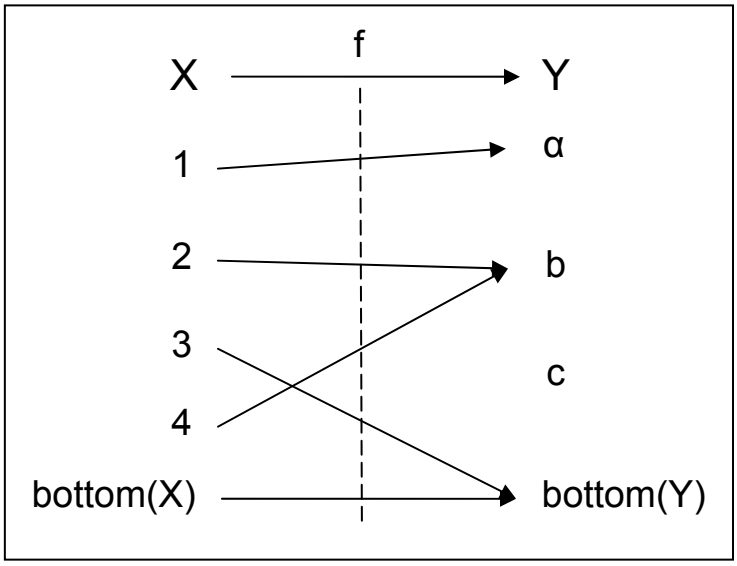
3.1.2 Αντιστροφή Συνάρτησης

Η έννοια της αντιστροφής μιας δεδομένης (μερικής) συνάρτησης, πλαισιώνεται σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 3.7: *Δεδομένης μιας συνάρτησης* $f : X \to Y$, *η συνάρτηση* $h : \wp(Y) \to \wp(X)$, *τέτοια ώστε* $\forall B \subseteq Y$, $h(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$, *αποτελεί την αντίστροφη συνάρτηση της* f *και συμβολίζεται ως* f^{-1}.□

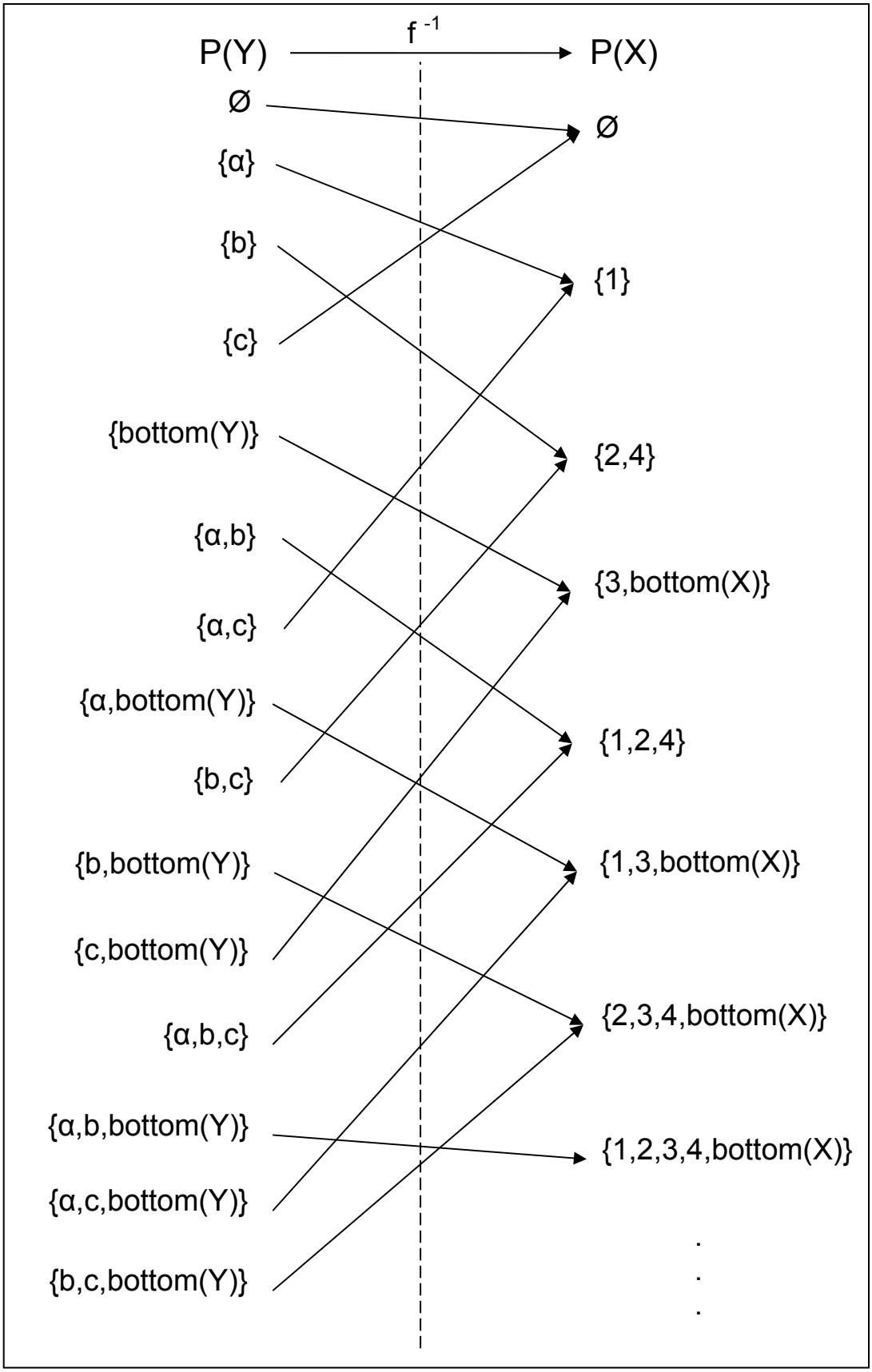
Ουσιαστικά, η αντίστροφη συνάρτηση μιας δεδομένης συνάρτησης $f : X \to Y$ αναστρέφει την αντιστοίχηση των στοιχείων του X στο Y μέσω των δυναμοσυνόλων των συνόλων αυτών:

Παράδειγμα 3.5: Έστω τα σύνολα $X = \{1,2,3,4, bottom(X)\}$ και $Y = \{a, b, c, bottom(Y)\}$, καθώς και η συνάρτηση $f : X \to Y$, τέτοια ώστε $f(1) = a$ και $f(2) = f(4) = b$. Επίσης, μέσω του ορισμού των στοιχείων-πυθμένων έχουμε ότι $f(bottom(X)) = f(3) = bottom(Y)$. Η Εικόνα 3.10 παρουσιάζει μια σχηματική αναπαράσταση της f.



Εικόνα 3.10 - Η συνάρτηση f του Παραδείγματος 3.5

Η αντίστροφη της f που προσδιορίζεται από τον Ορισμό 3.7 είναι η $f^{-1} : \wp(Y) \to \wp(X)$, η οποία και αναπαρίσταται σχηματικά στην Εικόνα 3.11. Απ' ότι βλέπουμε, η f^{-1} *σχετίζει έμμεσα τα στοιχεία του* $range(f)$ *(συμπεριλαμβανομένου και του* $bottom(Y)$*) με όλα τα στοιχεία του* X *(συμπεριλαμβανομένου και του* $bottom(X)$*), εφόσον η ένωση των εικόνων μέσω* f^{-1} *των μονοσυνόλων του* $\wp(Y)$ *που περιέχουν στοιχεία του* $range(f)$ *ισούται με* X*,* δηλαδή $f^{-1}(\{a\}) \cup f^{-1}(\{b\}) \cup f^{-1}(\{bottom(Y)\} = \{1\} \cup \{2,4\} \cup \{3, bottom(X)\} = X$.□



Εικόνα 3.11 – Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της συνάρτησης f του Παραδείγματος 3.5

Όπως είδαμε στην παρουσίαση της συναρτησιακής άλγεβρας στην προηγούμενη ενότητα, καθεμία από τις τέσσερις συναρτησιακές πράξεις που την αποτελούν έχει ως αποτέλεσμα μια νέα συνάρτηση, *άρα και για αυτές, μέσω του Ορισμού 3.7, μπορεί να καθοριστεί μια αντίστοιχη αντίστροφη συνάρτηση*. Επιπροσθέτως, για τις πράξεις της συναρτησιακής σύνθεσης, του συναρτησιακού ταιριάσματος, αλλά και του συναρτησιακού περιορισμού, η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης-αποτελέσματος *σχετίζεται άμεσα με τις αντίστροφες συναρτήσεις των συναρτήσεων-ορισμάτων*. Συγκεκριμένα, από τα [28], [29] έχουμε τα παρακάτω λήμματα:

Λήμμα 3.1: *Δεδομένων δύο συναρτήσεων* $f : X \to Y$ *και* $g : Y \to Z$, *καθώς και της συναρτησιακής σύνθεσής τους* $g \circ f : X \to Z$, $\forall z \in range(g \circ f)$ *ισχύει ότι* $(g \circ f)^{-1}(z) = \bigcup_{y \in g^{-1}(z)} f^{-1}(y)$.□

Λήμμα 3.2: *Δεδομένων δύο συναρτήσεων* $f : X \to Y$ *και* $g : X \to Z$, *καθώς και του συναρτησιακού ταιριάσματός τους* $f \wedge g : X \to Y \times Z$, $\forall (y,z) \in range(f \wedge g)$, *ισχύει ότι* $(f \wedge g)^{-1}((y,z)) = f^{-1}(y) \cap g^{-1}(z)$.□

Λήμμα 3.3: *Δεδομένης μιας συνάρτησης* $f : X \to Y$, *καθώς και του συναρτησιακού περιορισμού της,* ${}_S/f : S \to Y$, *πάνω στο πεδίο ορισμού της από το σύνολο* $S \subseteq X$, $\forall y \in range({}_S/f)$ *ισχύει ότι* $({}_S/f)^{-1}(y) = S \cap f^{-1}(y)$.□

3.2 Βασικοί Ορισμοί Προτιμήσεων

Εφόσον παραθέσαμε τα κύρια χαρακτηριστικά του συναρτησιακού κόσμου, προχωράμε στην ανάλυση του θεωρητικού μας πλαισίου, το οποίο και χωρίζεται σε τρία κύρια μέρη:

a) *Στον γενικό ορισμό της προτίμησης στο συναρτησιακό περιβάλλον,*
b) *Στη διάταξη των αντικειμένων μέσω μιας δηλωμένης προτίμησης, και*
c) *Στη διαδικασία κατασκευής της διάταξης που χαρακτηρίζει μια δηλωμένη προτίμηση του χρήστη.*

Στη συνέχεια της ενότητας αυτής, παρουσιάζουμε διεξοδικά τα μέρη αυτά.

3.2.1 Γενικός Ορισμός Προτιμήσεων

Για να μπορέσουμε να προσδώσουμε ένα γενικό ορισμό της προτίμησης στο συναρτησιακό περιβάλλον, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας δύο σημαντικούς παράγοντες:

a) Ο χρήστης, τις περισσότερες φορές, *δεν είναι σε θέση να γνωρίζει όλα τα αντικείμενα που διαθέτει μια συλλογή*, όπως π.χ. γίνεται στις μηχανές αναζήτησης. Έτσι, στο συναρτησιακό πλαίσιο που εξετάζουμε, οι προτιμήσεις θα πρέπει να ορίζονται πάνω σε δομές πληροφορίας που *δεν επηρεάζονται από το σύνολο των διαθέσιμων αντικειμένων*. Τέτοιες δομές είναι τα *σύνολα άφιξης (codomains) των συναρτήσεων-χαρακτηριστικών*.

b) Ο αριθμός και η φύση των συναρτήσεων-χαρακτηριστικών που εμπλέκονται σε μια έκφραση προτίμησης του χρήστη *μπορεί να ποικίλλει*. Οπότε, στο συναρτησιακό πλαίσιο που εξετάζουμε, κάθε προτίμηση θα πρέπει να ορίζεται με βάση το σύνολο των συναρτήσεων-χαρακτηριστικών που εμπλέκονται σ' αυτή.

Με βάση τους δύο παραπάνω παράγοντες, οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 3.8: *Έστω* X *το σύνολο των αντικειμένων που θέλουμε να διατάξουμε και* $f_1 : X \to Y_1, ..., f_n : X \to Y_n$ *διαφορετικές μεταξύ τους συναρτήσεις που χαρακτηρίζουν τα αντικείμενα αυτά. Μια προτίμηση* P *που εμπλέκει τις* $f_1, ..., f_n$ *αποτελεί μια μερική διάταξη του καρτεσιανού γινομένου* $Y_1 \times \cdots \times Y_n$ *και συμβολίζεται ως* $P = (Y_1 \times \cdots \times Y_n, \leq_P)$*, όπου* $\leq_P$ *η δυαδική σχέση που την αναπαριστά στο* $Y_1 \times \cdots \times Y_n$*.*

Η έκφραση $a \leq_P b$*, όπου* $a, b \in Y_1 \times \cdots Y_n$*, μεταφράζεται: «Το αντικείμενο* b *προτιμάται από το αντικείμενο* a *σε σχέση με την προτίμηση* P *».*□

Απ' ότι παρατηρούμε, ο Ορισμός 3.8 ικανοποιεί τους δύο προαναφερθέντες παράγοντες, καθότι η P ορίζεται *σε σχέση με τις εμπλεκόμενες συναρτήσεις-χαρακτηριστικά και σχετίζεται μόνο με τα σύνολα άφιξης των συναρτήσεων αυτών, άρα και δεν επηρεάζεται από το* X.

Το κυριότερο χαρακτηριστικό που προσδιορίζει το πλαίσιό μας, το οποίο και διαφαίνεται ξεκάθαρα στον παραπάνω ορισμό, είναι η αντιμετώπιση των προτιμήσεων ως μερικές διατάξεις, υιοθετώντας κατά ένα μεγάλο μέρος την αντίληψη των περισσοτέρων εφαρμογών του Παγκόσμιου Ιστού. Λέμε κατά ένα μεγάλο μέρος, καθότι η αντίληψη που έχει κυριαρχήσει είναι η θεώρηση των προτιμήσεων ως *αυστηρές μερικές διατάξεις*. Όμως, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, τα δύο αυτά είδη δυαδικών σχέσεων είναι διαισθητικά ισοδύναμα μεταξύ τους και, εφόσον στο πλαίσιό μας ασχολούμαστε με προτιμήσεις πάνω σε *σύνολα* (τα οποία και περιέχουν στοιχεία ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους), η *αυστηρή ανισότητα* που χαρακτηρίζει την αυστηρή μερική διάταξη δεν προσφέρει κάποια παραπάνω λειτουργικότητα στη διάταξη των στοιχείων των συνόλων αυτών.

Τέλος, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, για τη μετατροπή των μερικών συναρτήσεων του πλαισίου μας σε ολικές, εφοδιάζουμε κάθε σύνολο με ένα στοιχείο-πυθμένα, το οποίο και μεταφράζουμε ως μη-ορισμένη τιμή του συνόλου αυτού. Άρα, δεδομένης μιας προτίμησης $P = (Y_1 \times \cdots \times Y_n, \leq_P)$ που εμπλέκει τις συναρτήσεις-χαρακτηριστικά $f_1 : X \to Y_1, ..., f_n : X \to Y_n$, εφόσον το $bottom(Y_1 \times \cdots \times Y_n)$ αποτελεί *μη-ορισμένη τιμή του* $Y_1 \times \cdots \times Y_n$ *(δηλαδή ουσιαστικά δεν υπάρχει)*, τότε η $\leq_P$ *δεν διατάσσει το στοιχείο αυτό σε σχέση με τις υπόλοιπες τιμές του* $Y_1 \times \cdots \times Y_n$. Συγκεκριμένα, έχουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 3.1: *Έστω προτίμηση* $P = (Y_1 \times \cdots \times Y_n, \leq_P)$, *όπου* $f_1 : X \to Y_1, ..., f_n : X \to Y_n$ *οι συναρτήσεις-χαρακτηριστικά που εμπλέκονται σ' αυτή. Τότε,* $\forall y \in Y_1 \times \cdots \times Y_n$ *με* $y \neq bottom(Y_1 \times \cdots \times Y_n)$, *ισχύει ότι* $y \not\leq_P bottom(Y_1 \times \cdots \times Y_n)$ *και* $bottom(Y_1 \times \cdots \times Y_n) \not\leq_P y$.□

3.2.2 Διάταξη Αντικειμένων Μέσω Προτιμήσεων

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, ο κύριος σκοπός μας, δεδομένης μιας προτίμησης που δηλώνεται από κάποιον χρήστη, είναι *η παρουσίαση στο χρήστη αυτόν μιας αλληλουχίας από οθόνες αποτελεσμάτων, διαφορετικών σε κάθε οθόνη, ξεκινώντας από την οθόνη με τα καλύτερα αποτελέσματα, συνεχίζοντας με την οθόνη που εμφανίζει τα επόμενα καλύτερα αποτελέσματα, και ούτω καθεξής, καταλήγοντας, τελικά, στην οθόνη με τα χειρότερα αποτελέσματα*. Για να φτάσουμε από μια ορισμένη προτίμηση του πλαισίου μας σ' αυτή την αλληλουχία οθονών, διακρίνουμε δύο κύριες φάσεις:

a) *Την αντανάκλαση της μερικής διάταξης των τιμών των συναρτήσεων-χαρακτηριστικών σε μια αντίστοιχη (μερική) διάταξη πάνω στα διαθέσιμα αντικείμενα, και*
b) *Τη μετάβαση της (μερικής) διάταξης των διαθέσιμων αντικειμένων στην ολική διάταξη συνόλων αντικειμένων*.

Παρακάτω, αναλύουμε την διεκπεραίωση των δύο αυτών φάσεων, παραθέτοντας το θεωρητικό υπόβαθρο που χρησιμοποιούμε για κάθε μια.

3.2.2.1 Από τη Δηλωμένη Προτίμηση στη Διάταξη των Αντικειμένων

Δεδομένης μιας προτίμησης $P = (Y_1 \times \cdots \times Y_n, \leq_P)$, όπου $f_1 : X \to Y_1, ..., f_n : X \to Y_n$ οι διαφορετικές συναρτήσεις-χαρακτηριστικά που εμπλέκονται σ' αυτή, η μεθοδολογία που ακολουθούμε για τη διάταξη των στοιχείων του συνόλου X των αντικειμένων βασίζεται στον καθορισμό *κλάσεων ισοδυναμίας* στο X *με βάση τις* $f_1, ..., f_n$, τις οποίες κλάσεις και διατάσσουμε μέσω της P. Συγκεκριμένα, έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.1: *Έστω προτίμηση* $P = (Y_1 \times \cdots \times Y_n, \leq_P)$, *όπου* $f_1 : X \to Y_1, ..., f_n : X \to Y_n$ *οι συναρτήσεις-χαρακτηριστικά που εμπλέκονται σ' αυτή και έστω* $\approx_X$ *η σχέση ισοδυναμίας του* X, *για την οποία* $\forall x, x' \in X$, $x \approx_X x'$ *άνν* $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x) = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x')$, *όπου* $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n : X \to Y_1 \times \cdots \times Y_n$ *το συναρτησιακό ταίριασμα (Ορισμός 3.5) των* $f_1, ..., f_n$. *Τότε, η δυαδική σχέση*

$\leq_{X/\approx_X}$ *είναι μια μερική διάταξη του* $X/\approx_X$ *που αντικατοπτρίζει την* P *στο* $X/\approx_X$, *αν* $\forall \bar{a}, \bar{b} \in X/\approx_X$, $\bar{a} \leq_{X/\approx_X} \bar{b}$ *άνν* $\exists (y_1,...,y_n),(y'_1,...,y'_n) \in range(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)$ *τέτοιο ώστε* $\bar{a} = (f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}(y_1,...,y_n)$, $\bar{b} = (f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}(y'_1,...,y'_n)$ *και* $(y_1,...,y_n) \leq_P (y'_1,...,y'_n)$.□

<u>Απόδειξη</u>: Καταρχήν, πρέπει να αποδείξουμε ότι η $\approx_X$ είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική στο X (Ορισμός 2.16). Συγκεκριμένα:

a) $\forall x \in X$, $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x) = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x)$ που ισοδυναμεί με $x \approx_X x$ άρα η $\approx_X$ είναι ανακλαστική στο X.

b) $\forall x, x' \in X$, ισχύει ότι $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x) = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x') \Rightarrow f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x') = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x)$, το οποίο ισοδυναμεί με $x \approx_X x' \Rightarrow x' \approx_X x$, άρα η $\approx_X$ είναι συμμετρική στο X.

c) $\forall x, x', x'' \in X$, ισχύει ότι αν $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x) = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x')$ και $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x') = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x'')$ τότε $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x) = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x'')$ το οποίο ισοδυναμεί με $(x \approx_X x') \wedge (x' \approx_X x'') \Rightarrow x \approx_X x''$, άρα η $\approx_X$ είναι μεταβατική στο X, οπότε και αποτελεί σχέση ισοδυναμίας του X.

Επίσης, εφόσον, μέσω του Λήμματος 2.2, το σύνολο $range(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n) \subseteq Y_1 \times \cdots \times Y_n$ είναι μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_P$, για να αποδείξουμε ότι η $\leq_{X/\approx_X}$ αντικατοπτρίζει την P στο $X/\approx_X$, αρκεί, με βάση τον ορισμό της και το Θεώρημα 2.1, να αποδείξουμε ότι η $(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}$ είναι *αμφιμονοσήμαντη* από το $range(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)$ στο $X/\approx_X$, δηλαδή επί και ένα-προς-ένα. Συγκεκριμένα, έχουμε:

a) Έστω ότι η $(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}$ δεν είναι επί από το $range(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)$ στο $X/\approx_X$, δηλαδή $\exists \bar{a}' \in X/\approx_X$, τέτοιο ώστε $\neg \exists a' \in range(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n) : (f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}(a') = \bar{a}'$ (1). Όμως, εφόσον $\bar{a}' \in X/\approx_X$, μέσω του ορισμού της $\approx_X$ ισχύει ότι $\forall x \in \bar{a}'$, $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x) = b'$ (2), όπου $b' \in range(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)$ (3). Μέσω της (2), έχουμε ότι $(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}(b') = \bar{a}'$, πρόταση η οποία, σε

συνδυασμό με την (3), αναιρεί την (1). Επομένως, καταλήγουμε σε άτοπο, άρα η $(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}$ είναι επί από το $range(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)$ στο $X / \approx_X$.

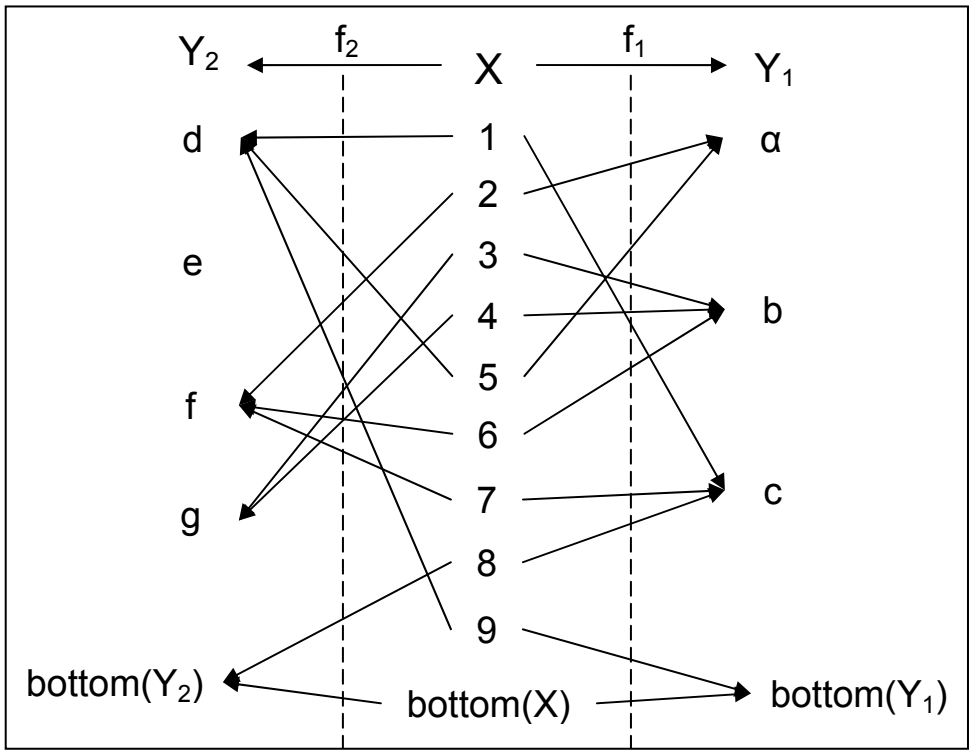
b) Έστω ότι η $(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}$ δεν είναι ένα-προς-ένα από το $range(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)$ στο $X / \approx_X$, δηλαδή $\exists a', b' \in range(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)$, τέτοια ώστε $(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}(a') = (f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}(b')$ (4), όπου $(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}(a')$, $(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}(b') \in X / \approx_X$ (5), και $a' \neq b'$ (6). Από τις (4) και (5), έστω $\overline{a}' \in X / \approx_X$ η κλάση ισοδυναμίας για την οποία ισχύει ότι $\overline{a}' = (f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}(a') = (f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}(b')$ (7). Όμως, μέσω του ορισμού της $\approx_X$, από την (7) έχουμε ότι $\forall x \in \overline{a}'$, $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x) = a'$ και $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n(x) = b'$, οπότε και $a' = b'$ (8). Όπως παρατηρούμε, η (8) αναιρεί την (6), οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα, η $(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}$ είναι ένα-προς-ένα από το $range(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)$ στο $X / \approx_X$.

Επομένως, η $(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)^{-1}$ είναι αμφιμονοσήμαντη από το $range(f_1 \wedge \cdots \wedge f_n)$ στο $X / \approx_X$.□

Απ' ότι παρατηρούμε, η διάταξη των αντικειμένων του X μέσω μιας προτίμησης $P = (Y_1 \times \cdots \times Y_n, \leq_P)$ δεν γίνεται πάνω στο σύνολο αυτό καθαυτό, αλλά μέσω του πηλίκου συνόλου του X ως προς $\approx_X$, $X / \approx_X$. Αυτό το γεγονός δεν δημιουργεί πρόβλημα στην εκάστοτε διάταξη, καθότι η ένωση των κλάσεων ισοδυναμίας του $X / \approx_X$, για οποιεσδήποτε εμπλεκόμενες συναρτήσεις $f_1, ..., f_n$, ισούται με το X, οπότε *όλα* τα αντικείμενα του X λαμβάνουν μέρος σ' αυτή.

Μέσω του Θεωρήματος 3.1, αναφερθήκαμε στην τυπική θεμελίωση της αντανάκλασης της μερικής διάταξης που αναπαριστά μια δηλωμένη προτίμηση μέσω μιας αντίστοιχης διάταξης πάνω στα διαθέσιμα αντικείμενα. Για να γίνουμε πιο κατανοητοί, παρακάτω παραθέτουμε δύο απλά παραδείγματα διάταξης μέσω προτιμήσεων, στα οποία η παραπάνω μεθοδολογία τίθεται σε πλήρη εφαρμογή. Το κοινό πεδίο «δράσης» των

παραδειγμάτων αποτελείται από ένα σύνολο αντικειμένων $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,bottom(X)\}$ και δύο συναρτήσεις-χαρακτηριστικά $f_1 : X \to Y_1 = \{a,b,c,bottom(Y_1)\}$ και $f_2 : X \to Y_2 = \{d,e,f,g,bottom(Y_2)\}$, όπου $f_1(2) = f_1(5) = a$, $f_1(3) = f_1(4) = f_1(6) = b$, $f_1(1) = f_1(7) = f_1(8) = c$, $f_2(1) = f_2(5) = f_2(9) = d$, $f_2(2) = f_2(6) = f_2(7) = f$ και $f_2(3) = f_2(4) = g$. Επίσης, μέσω του ορισμού των στοιχείων-πυθμένων που αναφέρθηκε προηγουμένως και με βάση το γεγονός ότι τα στοιχεία 8 και 9 *δεν απεικονίζονται σε ορισμένες τιμές των* Y_1 *και* Y_2 *αντίστοιχα*, έχουμε $f_1(9) = f_1(bottom(X)) = bottom(Y_1)$, καθώς, επίσης, και $f_2(8) = f_2(bottom(X)) = bottom(Y_2)$. Η Εικόνα 3.12 δίνει μια γραφική αναπαράσταση των δύο αυτών συναρτήσεων[2].

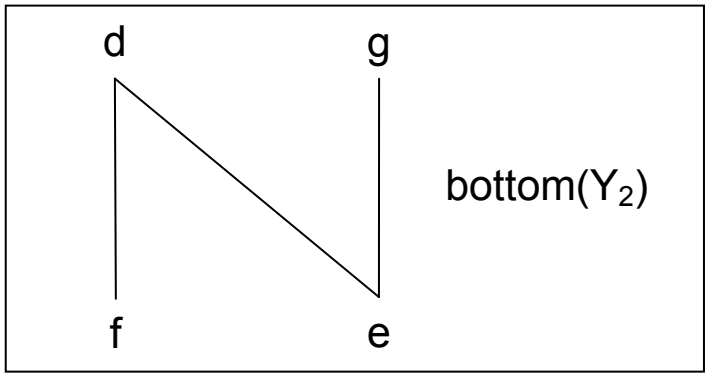


Εικόνα 3.12 - Οι συναρτήσεις f_1 και f_2

Παράδειγμα 3.6: Έστω το σύνολο $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,bottom(X)\}$ και οι συναρτήσεις $f_1 : X \to Y_1 = \{a,b,c,bottom(Y_1)\}$ και

[2] Η χρησιμοποίηση συναρτήσεων με πεπερασμένα σύνολα άφιξης είναι ενδεικτική και γίνεται μόνο για να δείξουμε μέσω διαγραμμάτων Hasse στα δύο παραδείγματα που ακολουθούν πώς μεταφέρεται η μερική διάταξη που σχετίζεται μ' αυτά τα σύνολα στο σύνολο των διαθέσιμων αντικειμένων. Η παραπάνω μεθοδολογία μπορεί κάλλιστα να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση που ένα τουλάχιστον από τα σύνολα άφιξης είναι μη-πεπερασμένο.

$f_2 : X \to Y_2 = \{d, e, f, g, bottom(Y_2)\}$ της Εικόνας 3.12, οι οποίες χαρακτηρίζουν τα αντικείμενα του συνόλου αυτού. Έστω τώρα η προτίμηση $P_1 = (Y_2, \leq_{P_1})$ που εμπλέκει *μόνο τη συνάρτηση* f_2, τέτοια ώστε $f \leq_{P_1} d$, $e \leq_{P_1} d$ και $e \leq_{P_1} g$ (το στοιχείο $bottom(Y_2)$ αποτελεί, όπως ξέρουμε, μη-ορισμένη τιμή του Y_2, οπότε, μέσω της Πρότασης 3.1, δεν το συμπεριλάβαμε στην $\leq_{P_1}$). Εφόσον το $Y_2 = \{d, e, f, g, bottom(Y_2)\}$ είναι μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_{P_1}$ (μέσω του Ορισμού 3.8) και είναι πεπερασμένο, μπορούμε να το αναπαραστήσουμε γραφικά με βάση το Hasse διάγραμμά του μέσω της $\leq_{P_1}$, το οποίο και παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.13:

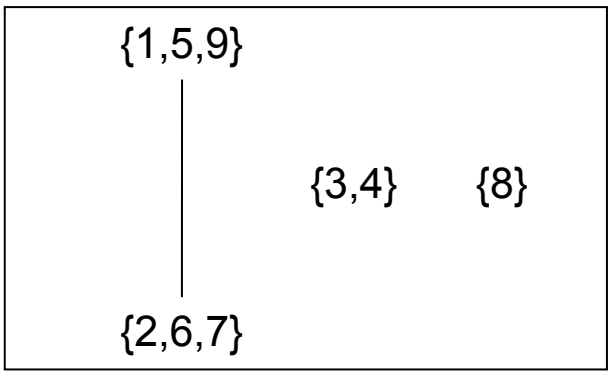


Εικόνα 3.13 - Το διάγραμμα Hasse του Y_2 μέσω της $\leq_{P_1}$

Εφόσον η f_2 είναι η μόνη συνάρτηση-χαρακτηριστικό που εμπλέκει η P_1, τότε, από τον ορισμό της $\approx_X$ στο Θεώρημα 3.1, οι κλάσεις ισοδυναμίας του $X / \approx_X$ *καθορίζονται από τις αντίστροφες εικόνες μέσω της* f_2 *των στοιχείων του* $range(f_2)$. Συγκεκριμένα, αφού $range(f_2) = \{d, e, f, g, bottom(Y_2)\}$, τότε το $X / \approx_X$ αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας $\bar{x}_1 = f_2^{-1}(d) = \{1,5,9\}$, $\bar{x}_2 = f_2^{-1}(f) = \{2,6,7\}$, $\bar{x}_3 = f_2^{-1}(g) = \{3,4\}$ και $\bar{x}_4 = f_2^{-1}(bottom(Y)) = \{8, bottom(X)\}$. Όπως είναι αναμενόμενο, οι κλάσεις $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ και $\bar{x}_4$ *διαμερίζουν* το X, αφού $\forall i, j \in \{1,2,3,4\}$ με $i \neq j$, $\bar{x}_i \cap \bar{x}_j = \emptyset$, καθώς και $\bar{x}_1 \cup \bar{x}_2 \cup \bar{x}_3 \cup \bar{x}_4 = X$.

Τέλος, για τη διάταξη των $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ και $\bar{x}_4$ με βάση την P_1, από τον ορισμό της $\leq_{X/\approx_X}$ στο Θεώρημα 3.1, έχουμε ότι $\bar{x}_2 \leq_{X/\approx_X} \bar{x}_1$, καθώς και ότι οι

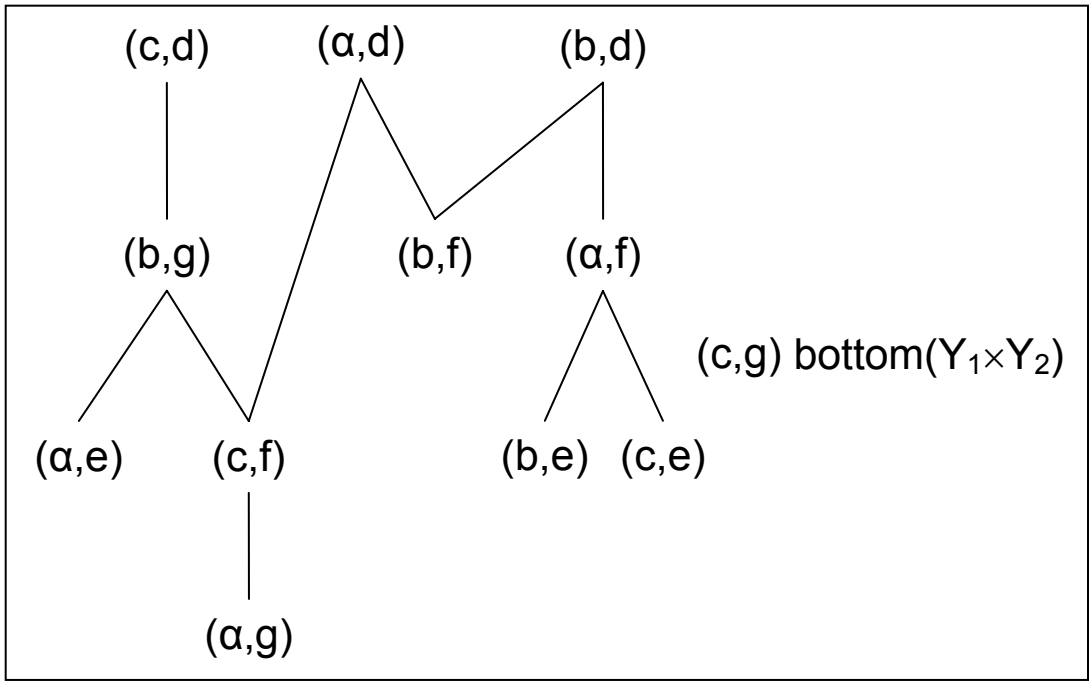
κλάσεις $\bar{x}_3$ και $\bar{x}_4$ *δεν διατάσσονται μέσω της* $\leq_{X/\approx_X}$ *με καμία άλλη κλάση του* $X/\approx_X$. Όμως, όπως είδαμε παραπάνω, το $bottom(X)$ αποτελεί μη-ορισμένη τιμή του X, δηλαδή, ουσιαστικά *δεν υπάρχει*. Άρα, για την τελική διάταξη των αντικειμένων του X, μπορούμε, χωρίς απώλεια πληροφορίας *να το εξαλείψουμε από το* X *και, κατ' επέκταση από την κλάση* $\bar{x}_4$, εφόσον δεν αντιμετωπίζεται ως υπαρκτό αντικείμενο στο X. Με βάση την λογική αυτή υπόθεση, η Εικόνα 3.14 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του $X/\approx_X = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\} = \{\{1,5,9\},\{2,6,7\},\{3,4\},\{8\}\}$ μέσω της $\leq_{X/\approx_X}$, το οποίο και αναπαριστά την διάταξη των στοιχείων του $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ με βάση την P_1. Απ' ότι παρατηρούμε, καθένα από τα ισοδύναμα στοιχεία 1,5 και 9 *προηγείται* καθενός από τα ισοδύναμα στοιχεία 2,6 και 7, όλα τα παραπάνω στοιχεία είναι *μη-διατασσόμενα* σε σχέση με καθένα από τα ισοδύναμα στοιχεία 3 και 4, καθώς και το στοιχείο 8.□



Εικόνα 3.14 - Το διάγραμμα Hasse του $X/\approx_X$ του Παραδείγματος 3.6 μέσω της $\leq_{X/\approx_X}$

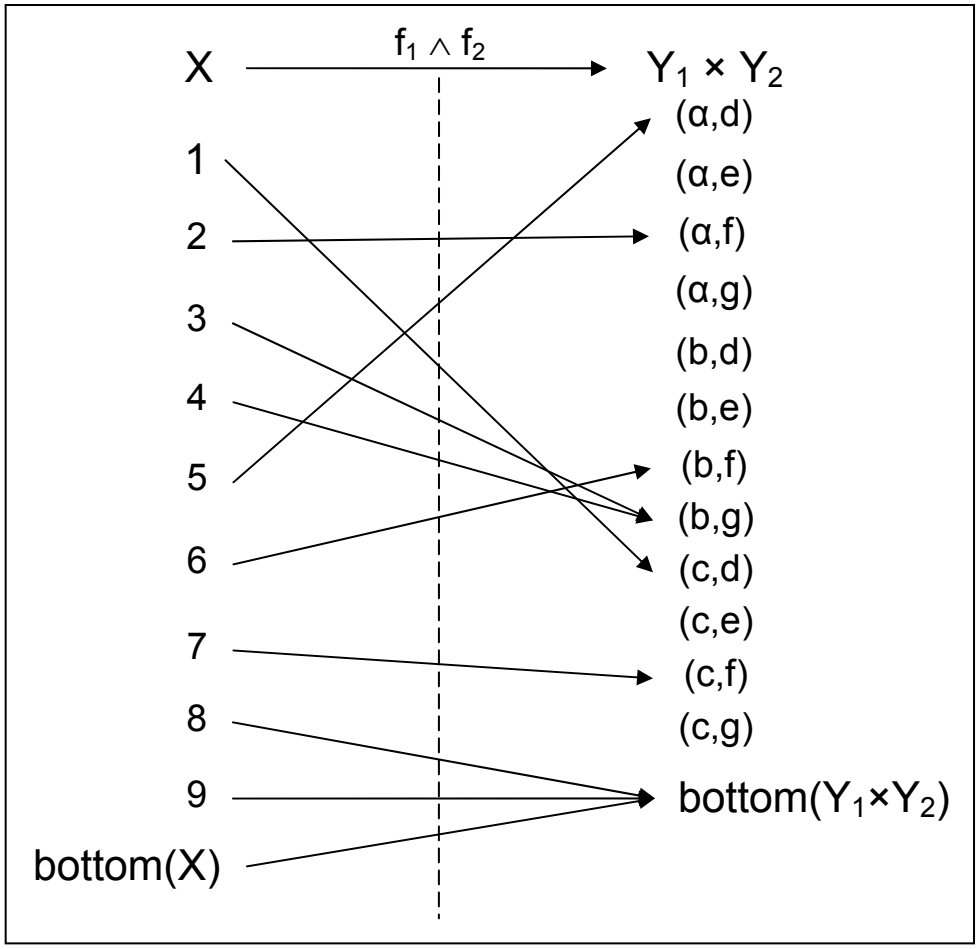
Παράδειγμα 3.7: Έστω πάλι το σύνολο $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,bottom(X)\}$ και οι συναρτήσεις $f_1 : X \to Y_1 = \{a,b,c,bottom(Y_1)\}$ και $f_2 : X \to Y_2 = \{d,e,f,g,bottom(Y_2)\}$ της Εικόνας 3.12, οι οποίες και χαρακτηρίζουν τα αντικείμενα του συνόλου αυτού. Έστω τώρα η προτίμηση $P_2 = (Y_1 \times Y_2, \leq_{P_2})$ που εμπλέκει τις f_1 και f_2, τέτοια ώστε $(b,g) \leq_{P_2} (c,d)$, $(a,e) \leq_{P_2} (b,g)$, $(c,f) \leq_{P_2} (b,g)$, $(c,f) \leq_{P_2} (a,d)$, $(a,g) \leq_{P_2} (c,f)$, $(b,f) \leq_{P_2} (a,d)$, $(b,f) \leq_{P_2} (b,d)$, $(a,f) \leq_{P_2} (b,d)$, $(b,e) \leq_{P_2} (a,f)$ και

$(c,e) \leq_{P_2} (a,f)$ (το στοιχείο $bottom(Y_1 \times Y_2)$ αποτελεί, όπως ξέρουμε, μη-ορισμένη τιμή του $Y_1 \times Y_2$, οπότε, μέσω της Πρότασης 3.1, δεν το συμπεριλάβαμε στην $\leq_{P_2}$) καθώς η $\leq_{P_2}$ είναι μεταβατική ως μερική διάταξη, από τις παραπάνω συσχετίσεις προκύπτει κι ότι $(a,e) \leq_{P_2} (c,d)$, $(c,f) \leq_{P_2} (c,d)$, $(a,g) \leq_{P_2} (b,g)$, $(a,g) \leq_{P_2} (c,d)$, $(a,g) \leq_{P_2} (a,d)$, $(b,e) \leq_{P_2} (b,d)$ και $(c,e) \leq_{P_2} (b,d)$). Εφόσον το $Y_1 \times Y_2$ = $\{(a,d), (a,e), (a,f), (a,g), (b,d), (b,e), (b,f), (b,g), (c,d), (c,e), (c,f), (c,g), bottom(Y_1 \times Y_2)\}$ είναι μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_{P_2}$ (μέσω του Ορισμού 3.8) και είναι πεπερασμένο, μπορούμε να το αναπαραστήσουμε γραφικά με βάση το Hasse διάγραμμά του μέσω της $\leq_{P_2}$, το οποίο και παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.15:



Εικόνα 3.15 - Το διάγραμμα Hasse του $Y_1 \times Y_2$ μέσω της $\leq_{P_2}$

Εφόσον η P_2 εμπλέκει τις f_1 και f_2, τότε, από τον ορισμό της $\approx_X$ στο Θεώρημα 3.1, οι κλάσεις ισοδυναμίας του $X / \approx_X$ *καθορίζονται από τις αντίστροφες εικόνες μέσω του συναρτησιακού ταιριάσματος* $f_1 \wedge f_2$ *των στοιχείων του* $range(f_1 \wedge f_2)$. Για να έχουμε μια καλύτερη εποπτεία της $f_1 \wedge f_2$, η Εικόνα 3.16 παρουσιάζει την σχηματική της αναπαράσταση.



Εικόνα 3.16 - Η συνάρτηση $f_1 \wedge f_2$

Όπως βλέπουμε από την Εικόνα 3.16, $range(f_1 \wedge f_2) = \{(a,d),(a,f),(b,f),(b,g),(c,d),(c,f),bottom(Y_1 \times Y_2)\}$, άρα οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας που προσδιορίζουν το $X / \approx_X$ είναι οι:

$\bar{x}_5 = (f_1 \wedge f_2)^{-1}(a,d) = \{5\}$,

$\bar{x}_6 = (f_1 \wedge f_2)^{-1}(a,f) = \{2\}$,

$\bar{x}_7 = (f_1 \wedge f_2)^{-1}(b,f) = \{6\}$,

$\bar{x}_8 = (f_1 \wedge f_2)^{-1}(b,g) = \{3,4\}$,

$\bar{x}_9 = (f_1 \wedge f_2)^{-1}(c,d) = \{1\}$,

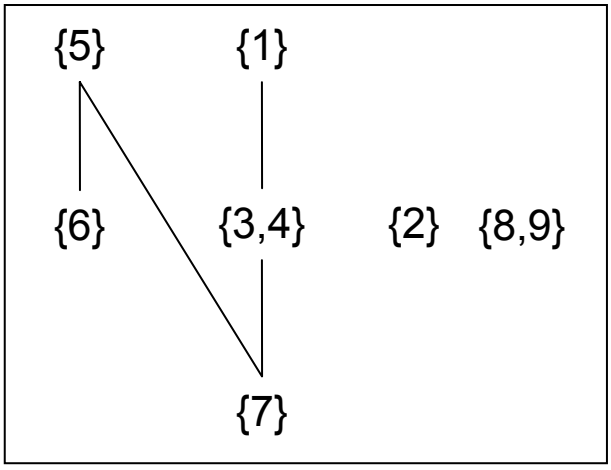
$\bar{x}_{10} = (f_1 \wedge f_2)^{-1}(c,f) = \{7\}$, και

$\bar{x}_{11} = (f_1 \wedge f_2)^{-1}(bottom(Y_1 \times Y_2)) = \{8,9,bottom(X)\}$.

Απ' ότι βλέπουμε, είναι δυνατό μια κλάση ισοδυναμίας να περιέχει *μόνο* ένα στοιχείο. Επίσης, όπως είναι αναμενόμενο, οι κλάσεις $\bar{x}_5$, $\bar{x}_6$, $\bar{x}_7$, $\bar{x}_8$, $\bar{x}_9$, $\bar{x}_{10}$

και $\bar{x}_{11}$ *διαμερίζουν* το X, αφού $\forall i, j \in \{5,6,7,8,9,10,11\}$ με $i \neq j$, $\bar{x}_i \cap \bar{x}_j = \emptyset$, καθώς και $\bar{x}_5 \cup \bar{x}_6 \cup \bar{x}_7 \cup \bar{x}_8 \cup \bar{x}_9 \cup \bar{x}_{10} \cup \bar{x}_{11} = X$.

Τέλος, για τη διάταξη των $\bar{x}_5$, $\bar{x}_6$, $\bar{x}_7$, $\bar{x}_8$, $\bar{x}_9$, $\bar{x}_{10}$ και $\bar{x}_{11}$ με βάση την P_2, από τον ορισμό της $\leq_{X/\approx_X}$ στο Θεώρημα 3.1 έχουμε ότι $\bar{x}_8 \leq_{X/\approx_X} \bar{x}_9$, $\bar{x}_{10} \leq_{X/\approx_X} \bar{x}_8$, $\bar{x}_{10} \leq_{X/\approx_X} \bar{x}_9$, $\bar{x}_{10} \leq_{X/\approx_{S_2^\wedge}} \bar{x}_5$ και $\bar{x}_7 \leq_{X/\approx_X} \bar{x}_5$, καθώς και ότι οι κλάσεις $\bar{x}_6$ και $\bar{x}_{11}$ *δεν διατάσσονται μέσω της* $\leq_{X/\approx_X}$ *με καμία άλλη κλάση του* $X/\approx_X$. Όμως, όπως ειπώθηκε και στο Παράδειγμα 3.6, το $bottom(X)$ αποτελεί μη-ορισμένη τιμή του X. Άρα, ενεργώντας ανάλογα όπως παραπάνω, *εξαλείφουμε το* $bottom(X)$ *από το* X *και, κατ' επέκταση από την κλάση* $\bar{x}_{11}$. Η Εικόνα 3.17 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του $X/\approx_X = \{\bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7, \bar{x}_8, \bar{x}_9, \bar{x}_{10}, \bar{x}_{11}\} = \{\{5\},\{2\},\{6\},\{3,4\},\{1\},\{7\},\{8,9\}\}$ μέσω της $\leq_{X/\approx_X}$, το οποίο και αναπαριστά την διάταξη των στοιχείων του $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ με βάση την P_2. Όπως βλέπουμε, το στοιχείο 1 προηγείται καθενός από τα ισοδύναμα στοιχεία 3 και 4, καθώς επίσης και του στοιχείου 7. Επίσης, καθένα από τα ισοδύναμα στοιχεία 3 και 4, καθώς και το στοιχείο 5, προηγείται του στοιχείου 7. Ομοίως, το στοιχείο 5 προηγείται του στοιχείου 6 και τα ισοδύναμα στοιχεία 8 και 9, καθώς και το στοιχείο 2 *δεν διατάσσονται* σε σχέση με τα υπόλοιπα στοιχεία του X.□



Εικόνα 3.17 - Το διάγραμμα Hasse του $X/\approx_X$ του Παραδείγματος 3.7 μέσω της $\leq_{X/\approx_X}$

3.2.2.2 Από τη Μερική στην Ολική Διάταξη των Αντικειμένων

Στην προηγούμενη ενότητα, αναλύσαμε τη διαδικασία περάσματος από μια δηλωμένη προτίμηση στη μερική διάταξη των διαθέσιμων αντικειμένων με βάση την προτίμηση αυτή. Πιο συγκεκριμένα, δεδομένης της μερικής διάταξης που αναπαριστά μια προτίμηση πάνω στις τιμές των συναρτήσεων-χαρακτηριστικών, καταλήξαμε σε μια αντίστοιχη μερική διάταξη των αντικειμένων με τη χρήση κατάλληλων κλάσεων ισοδυναμίας. Στην ενότητα αυτή, αναπτύσσουμε τον *τρόπο μετάβασης της παραπάνω μερικής διάταξης σε μια αντίστοιχη ολική διάταξη των αντικειμένων*. Διαισθητικά, η ύπαρξη αυτής της ολικής διάταξης επιτρέπει την παρουσίαση των αντικειμένων σε μια σειρά από διαφορετικές οθόνες, οι οποίες και διαδέχονται η μια την άλλη, ξεκινώντας από την οθόνη με τα καλύτερα αποτελέσματα και καταλήγοντας στην οθόνη με τα χειρότερα. Συγκεκριμένα, αν $O_1,...,O_m$, με $m \geq 1$, τα σύνολα στοιχείων του X που αναπαριστούν τις οθόνες αυτές, όπου το σύνολο O_i, με $i \in \{1,...,m\}$, αποτελεί την i-οστή σε σειρά οθόνη που εμφανίζεται στο χρήστη, τότε *πρέπει*:

a) $\forall j,k \in \{1,...,m\}$ με $j \neq k$, $O_j \cap O_k = \emptyset$,

b) $\bigcup_{l=1}^{m} O_l = X$, και

c) Να υπάρχει *ολική διάταξη* $\leq_O$, πάνω στο σύνολο $Monitors = \{O_1,...,O_m\}$ που να σχετίζεται με την διάταξη στα αντικείμενα του X και για την οποία $\forall q,r \in \{1,...,m\}$ με $q > r$, να ισχύει ότι $O_q \leq_O O_r$.

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, έχουμε μεταφερθεί πλέον σε *πεπερασμένα και μερικώς διατεταγμένα σύνολα*. Δεδομένου ενός τέτοιου συνόλου, τα στοιχεία που περιέχει μπορούν να διαχωριστούν σε δύο συγκεκριμένες κατηγορίες, ανάλογα το αν λαμβάνουν *ενεργό μέρος ή όχι* στη μερική διάταξη που το χαρακτηρίζει. Συγκεκριμένα, έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 3.9: *Έστω σύνολο Q πεπερασμένο και μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_Q$. Ένα στοιχείο $\omega \in Q$, για το οποίο $\exists x \in Q$ με $x \neq \omega$, τέτοιο ώστε $\omega \leq_P x$ ή $x \leq_P \omega$, αποτελεί ένα ενεργό (active) στοιχείο του Q με βάση την $\leq_Q$, καθώς και ένα στοιχείο $\omega' \in Q$, για το οποίο $\neg\exists x \in Q$ με $x \neq \omega'$, τέτοιο ώστε $\omega' \leq_P x$ ή $x \leq_P \omega'$, αποτελεί ένα μη-ενεργό (inactive) στοιχείο του Q με βάση την $\leq_Q$. Τα σύνολα όλων των ενεργών και μη-ενεργών στοιχείων του Q με βάση την $\leq_Q$ συμβολίζονται ως $Active(Q,\leq_Q)$ και $Inactive(Q,\leq_Q)$ αντίστοιχα.*□

Απ' ότι παρατηρούμε, ένα στοιχείο $x \in Inactive(Q,\leq_Q)$ αποτελεί *μέγιστο* (Ορισμός 2.6), καθώς και *ελάχιστο* (Ορισμός 2.7) στοιχείο του Q με βάση την $\leq_Q$. Επίσης, εφόσον το Q είναι πεπερασμένο, τότε, για *οποιαδήποτε μερική διάταξη $\leq_Q$ πάνω στο Q*, τα σύνολα $Active(Q,\leq_Q) \subseteq Q$ και $Inactive(Q,\leq_Q) \subseteq Q$ είναι και αυτά *πεπερασμένα*. Ακόμα, μέσω του Ορισμού 3.9, *για οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο Q και για οποιαδήποτε μερική διάταξη $\leq_Q$ πάνω στο Q*, ισχύει ότι $Active(Q,\leq_Q) \cap Inactive(Q,\leq_Q) = \emptyset$, καθώς και $Active(Q,\leq_Q) \cup Inactive(Q,\leq_Q) = Q$, δηλαδή τα σύνολα $Active(Q,\leq_Q)$ και $Inactive(Q,\leq_Q)$ *διαμερίζουν* το Q. Π.χ., στο Παράδειγμα 3.7, για το πεπερασμένο σύνολο $X/\approx_X = \{\{1\},\{2\},\{3,4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8,9\}\}$ και τη μερική διάταξή του $\leq_{X/\approx_X}$, έχουμε $Active(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X})$ = $\{\{1\},\{3,4\},\{5\},\{6\},\{7\}\}$ και $Inactive(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X})$ = $\{\{2\},\{8,9\}\}$, οπότε, απ' ότι παρατηρούμε, $Active(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X}) \cap Inactive(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X})$ = $\emptyset$, καθώς και $Active(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X}) \cup Inactive(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X}) = X/\approx_X$.

Ο λόγος για τον οποίο γίνεται ο παραπάνω διαχωρισμός, οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε μη-ενεργό στοιχείο ενός πεπερασμένου και μερικώς διατεταγμένου συνόλου με βάση τη μερική διάταξη που το χαρακτηρίζει, *ουσιαστικά δεν αποτελεί μέρος της διάταξης αυτής, εφόσον δεν διατάσσεται μέσω αυτής με κανένα από τα υπόλοιπα στοιχεία του συνόλου*, δημιουργώντας, έτσι, μια αίσθηση *«αδιαφορίας»* του χρήστη προς κάθε τέτοιο

στοιχείο. Αυτού του είδους η *«αδιαφορία»*, έχει άμεσο αντίκτυπο όσον αφορά *τη θέση όπου πρέπει να βρίσκονται τα μη-ενεργά στοιχεία στην τελική αλληλουχία των οθονών*. Συγκεκριμένα, θεωρώντας ότι τα αποτελέσματα που *δεν ενδιαφέρουν το χρήστη* αποτελούν τα *χειρότερα αποτελέσματα για αυτόν*, *τα μη-ενεργά στοιχεία μπορούν να εμφανίζονται στην τελευταία οθόνη*.

Έχοντας κατασταλάξει για τη θέση των μη-ενεργών στοιχείων, *εφόσον υπάρχουν τέτοια*, ενός *πεπερασμένου και μερικώς διατεταγμένου συνόλου στην τελική αλληλουχία οθονών*, μένει να καθορίσουμε και τη θέση των υπόλοιπων, *ενεργών*, στοιχείων του συνόλου σ' αυτή την αλληλουχία. Με άλλα λόγια, να *δημιουργήσουμε μια δομή πληροφορίας, η οποία να σχετίζεται με τη μερική διάταξη των ενεργών στοιχείων του συνόλου, καθώς και να μπορεί να αναπαρασταθεί τελικά ως αλληλουχία ενός αριθμού οθονών, όπως αυτή καθορίστηκε παραπάνω.* Στην περίπτωση *που υπάρχουν ενεργά στοιχεία στο σύνολο* (οπότε και έχει νόημα η διάταξή τους μέσω της αλληλουχίας των οθονών), οι παραπάνω απαιτήσεις μπορούν να ικανοποιηθούν με δύο διαφορετικούς τρόπους, μέσω των αλγόριθμων *TotalOrderWithMaximals (TOWMax)* (Εικόνα 3.18) και *TotalOrderWithMinimals (TOWMin)* (Εικόνα 3.19), οι οποίοι αποτελούν *παραλλαγές* του αλγόριθμου της *Τοπολογικής Ταξινόμησης (Topological Sort)* [3], [13], [26], [27]. Το κύριο χαρακτηριστικό που τους διακρίνει, είναι η χρήση των μερικών διατάξεων που κατασκευάζονται μέσω των Θεωρημάτων 2.2 και 2.3 αντίστοιχα, ως *οι ολικές διάταξες που συσχετίζουν τελικά τα ενεργά στοιχεία του συνόλου-εισόδου*.

Είσοδος: Μη-κενό και πεπερασμένο σύνολο Q μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_Q$, όπου $Active(Q,\leq_Q) \neq \emptyset$

Έξοδος: Σύνολο $T = \{T_1,...,T_n\} \subset \wp(Q)$, τέτοιο ώστε,

(α) $\forall i, j \in \{1,...,n\}$ με $i \neq j$, $T_i \cap T_j = \emptyset$

(β) $\bigcup_{k=1}^{n} T_k = Active(Q,\leq_Q)$

(γ) Η μερική διάταξη $\leq_{MaxU_Q}$ που κατασκευάζεται μέσω του Θεωρήματος 2.2 στο σύνολο $U_Q = \{W \in \wp(Q) / \emptyset \mid \forall w, w' \in W$ *με* $w \neq w'$, *να ισχύει* $w \not\leq_Q w'$ *και* $w' \not\leq_Q w\} \subset \wp(Q)$, αποτελεί ολική διάταξη του T, τέτοια ώστε $T_n \leq_{MaxU_Q} \cdots \leq_{MaxU_Q} T_1$

Σώμα:

Βήμα 1: $A := Active(Q,\leq_Q)$, $T := \emptyset$, $i = 0$.

Βήμα 2: Ενόσω $A \neq \emptyset$, **Ξεκίνα**

Βήμα 2.1: $i := i + 1$

Βήμα 2.2: $T_i := \{\omega \in A \mid \neg\exists z \in A$ *με* $z \neq \omega : \omega \leq_Q z\}$

Βήμα 2.3: Πρόσθεσε το T_i στο T

Βήμα 2.4: $A := A - T_i$

Τελείωσε

Βήμα 3: Επέστρεψε $T = \{T_1,...,T_n\}$, όπου $n = i$

Εικόνα 3.18 - Ο αλγόριθμος *TOWMax*

Είσοδος: Μη-κενό και πεπερασμένο σύνολο Q μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_Q$, όπου $Active(Q,\leq_Q) \neq \emptyset$

Έξοδος: Σύνολο $V = \{V_1,...,V_l\} \subset \wp(Q)$, τέτοιο ώστε,

(α) $\forall i, j \in \{1,...,l\}$ με $i \neq j$, $V_i \cap V_j = \emptyset$

(β) $\bigcup_{k=1}^{l} V_k = Active(Q,\leq_Q)$

(γ) Η μερική διάταξη $\leq_{MinU_Q}$ που κατασκευάζεται μέσω του Θεωρήματος 2.3 στο σύνολο $U_Q = \{W \in \wp(Q) / \emptyset \mid \forall w, w' \in W$ *με* $w \neq w'$, *να ισχύει* $w \not\leq_Q w'$ *και* $w' \not\leq_Q w\} \subset \wp(Q)$, αποτελεί ολική διάταξη του V, τέτοια ώστε $V_1 \leq_{MinU_Q} \cdots \leq_{MinU_Q} V_l$

Σώμα:

Βήμα 1: $A := Active(Q,\leq_Q)$, $V := \emptyset$, $i = 0$.

Βήμα 2: Ενόσω $A \neq \emptyset$, **Ξεκίνα**

Βήμα 2.1: $i := i + 1$

Βήμα 2.2: $V_i := \{\omega \in A \mid \neg\exists z \in A$ *με* $z \neq \omega : z \leq_Q \omega\}$

Βήμα 2.3: Πρόσθεσε το V_i στο V

Βήμα 2.4: $A := A - V_i$

Τελείωσε

Βήμα 3: Επέστρεψε $V = \{V_1,...,V_l\}$, όπου $l = i$

Εικόνα 3.19 – Ο αλγόριθμος *TOWMin*

Απ' ότι βλέπουμε, οι διαδικασίες των δύο αλγόριθμων είναι αρκετά απλές και *σχεδόν παρόμοιες*. Συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος *TOWMax*, ξεκινώντας αρχικά από το σύνολο $Active(Q,\leq_Q) \subseteq Q$ (το οποίο, μέσω του Λήμματος 2.2, είναι μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_Q$), *υπολογίζει τα μέγιστα στοιχεία (maximal elements) του με βάση την* $\leq_Q$, χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2.6. Το σύνολο των στοιχείων αυτών, T_1, αποτελεί και το πρώτο σύνολο-στοιχείο που εισάγεται στο, αρχικά κενό, σύνολο T. Έπειτα, *αφαιρεί* τα στοιχεία του T_1 από το $Active(Q,\leq_Q)$ και *πράττει αναλόγως* για το σύνολο $Active(Q,\leq_Q) - T_1 \subseteq Q$, το

οποίο, μέσω του Λήμματος 2.2, *είναι και αυτό μερικώς διατεταγμένο ως προς* $\leq_Q$. Συνεχίζοντας επαναληπτικά την αφαίρεση των εκάστοτε μέγιστων στοιχείων έως ότου δεν υπάρχουν άλλα στοιχεία του $Active(Q,\leq_Q)$ προς εξέταση, το τελικό σύνολο T που επιστρέφεται ισούται με $T=\{T_1,...,T_n\}$, όπου το n είναι ίσο με τον αριθμό των εκτελέσεων των Βημάτων 2.1-2.4 (ο οποίος και ισούται με την τρέχουσα τιμή του i στο τέλος του Βήματος 2). Από την άλλη πλευρά, ο αλγόριθμος *TOWMin* εκτελείται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και ο *TOWMax*, με τη μόνη, αλλά *σημαντική*, διαφορά ότι σε κάθε εκτέλεση του Βήματος 2.2, *υπολογίζει τα ελάχιστα στοιχεία (minimal elements)* του εκάστοτε συνόλου $A\subseteq Q$ *με βάση την* $\leq_Q$, χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2.7. Πριν προχωρήσουμε στις αποδείξεις των συνθηκών (α), (β) και (γ) που ικανοποιούνται από τα σύνολα που επιστέφουν οι *TOWMax* και *TOWMin*, καθώς και σε κάποιο παράδειγμα που θα μας δώσει μια καλύτερη εποπτεία τους, παρακάτω παραθέτουμε ένα σημαντικό λήμμα που ισχύει:

Λήμμα 3.4: *Έστω σύνολο* Q *μη-κενό, πεπερασμένο και μερικώς διατεταγμένο ως προς* $\leq_Q$*, τέτοιο ώστε* $Active(Q,\leq_Q)\neq Ø$*. Τότε, τα σύνολα* $T=\{T_1,...,T_n\}$ *και* $V=\{V_1,...,V_l\}$ *που επιστρέφονται από τους αλγόριθμους TOWMax και TOWMin αντίστοιχα, έχουν μέγεθος μεγαλύτερο από 1 (δηλαδή* $n>1$ *και* $l>1$*).*□

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι $Active(Q,\leq_Q)\neq T_1$ (1) και $Active(Q,\leq_Q)\neq V_1$ (2). Συγκεκριμένα:

a) Έστω ότι η (1) δεν ισχύει, δηλαδή $Active(Q,\leq_Q)=T_1$. Από την πρώτη εκτέλεση των Βημάτων 2.1-2.4 στον *TOWMax*, προκύπτει ότι το T_1 αποτελείται από τα *μέγιστα στοιχεία του* $Active(Q,\leq_Q)$ *με βάση την* $\leq_Q$, οπότε, με βάση το Λήμμα 2.1(a), $x,y\in T_1=Active(Q,\leq_Q)$ με $x\neq y$, ισχύει ότι $x\not\leq_Q y$ και $y\not\leq_Q x$, πρόταση, η οποία παραβιάζει τον Ορισμό 3.9. Άρα, οδηγούμαστε σε άτοπο, οπότε η (1) ισχύει.

b) Έστω ότι η (2) δεν ισχύει, δηλαδή $Active(Q,\leq_Q) = V_1$. Από την πρώτη εκτέλεση των Βημάτων 2.1-2.4 στον *TOWMax*, προκύπτει ότι το V_1 αποτελείται από τα *ελάχιστα στοιχεία του* $Active(Q,\leq_Q)$ *με βάση την* $\leq_Q$, οπότε, με βάση το Λήμμα 2.1(b), $x, y \in V_1 = Active(Q,\leq_Q)$ με $x \neq y$, ισχύει ότι $x \not\leq_Q y$ και $y \not\leq_Q x$, πρόταση, η οποία παραβιάζει τον Ορισμό 3.9. Άρα, οδηγούμαστε σε άτοπο, οπότε και η (2) ισχύει.

Επομένως, αφού η (1) και η (2) ισχύει, άρα και το Λήμμα 3.4 ισχύει. □

Λαμβάνοντας υπόψη το παραπάνω λήμμα, προχωράμε στις αποδείξεις των τριών συνθηκών που ικανοποιούνται από τα σύνολα που επιστέφουν οι *TOWMax* και *TOWMin*:

<u>Απόδειξη των Συνθηκών του Αλγόριθμου *TOWMax*</u>:

a) **Για τη συνθήκη (α):** Στη m-οστή εκτέλεση των Βημάτων 2.1-2.4, όπου $2 \leq m \leq n$, ο καθορισμός του συνόλου T_m (Βήμα 2.2) λαμβάνει χώρα σε σύνολο από το οποίο *έχουν ήδη αφαιρεθεί τα στοιχεία που περιέχονται στα σύνολα* $T_1,...,T_{m-1}$. Άρα, $\forall m \in \{2,...,n\}, q \in \{1,...,m-1\}$ ισχύει ότι $T_m \cap T_q = \emptyset$, πρόταση από την οποία προκύπτει ότι $\forall i, j \in \{1,...,n\}$ με $i \neq j$, $T_i \cap T_j = \emptyset$, άρα η συνθήκη (α) ισχύει.

b) **Για τη συνθήκη (β):** Ουσιαστικά, το Βήμα 2 *διαμερίζει* το σύνολο $Active(Q,\leq_Q)$ στα σύνολα $T_1,...,T_n$, εφόσον, μέχρι να τελειώσει το Βήμα αυτό, σε κάθε εκτέλεση των Βημάτων 2.1-2.4 τα στοιχεία που καθορίζουν το εκάστοτε T_i, όπου $i \in \{1,...,n\}$, *αφαιρούνται* από το σύνολο A που αρχικά ισούται με $Active(Q,\leq_Q)$, έως ότου το A γίνει κενό. Άρα, η συνθήκη (β) ισχύει.

c) **Για τη συνθήκη (γ):** Σε κάθε εκτέλεση του Βήματος 2.2, το εκάστοτε σύνολο T_i, όπου $i \in \{1,...,n\}$, αποτελείται από *τα μέγιστα στοιχεία του συνόλου* A *εκείνη τη στιγμή με βάση την* $\leq_Q$, οπότε $T_i \subseteq A$ (1). Άρα, αφού σε κάθε εκτέλεση του Βήματος 2.2, για το

εκάστοτε σύνολο A ισχύει ότι $A \subseteq Active(Q, \leq_Q) \subseteq Q$ (2), τότε, από τις (1) και (2) έχουμε ότι $\forall i \in \{1,...,n\}$, $T_i \subseteq Active(Q, \leq_Q) \subseteq Q$ (3), οπότε και $T_i \in \wp(Q)$ (4). Επίσης, εφόσον το Q είναι πεπερασμένο, από την (2) προκύπτει ότι το εκάστοτε σύνολο A κάθε φορά που εκτελείται το Βήμα 2.2 είναι κι αυτό πεπερασμένο. Επιπροσθέτως, από την συνθήκη ικανοποίησης $A \neq \emptyset$ για την επανάληψη των Βημάτων 2.1-2.4, έχουμε ως αποτέλεσμα ότι το εκάστοτε σύνολο A κάθε φορά που εκτελείται το Βήμα 2.2, εκτός από πεπερασμένο είναι και μη-κενό. Οπότε, μέσω της Πρότασης 2.1(a), του Λήμματος 2.1(a) και με βάση το γεγονός ότι τα T_i, όπου $i \in \{1,...,n\}$, αποτελούν σύνολα που περιέχουν μέγιστα στοιχεία μη-κενών, πεπερασμένων και μερικώς διατεταγμένων συνόλων, έχουμε ότι $\forall i \in \{1,...,n\}$, $T_i \neq \emptyset$ (5), καθώς και $\forall x, y \in T_i$ με $x \neq y$, ισχύει $x \not\leq_Q y$ και $y \not\leq_Q x$ (6). Λαμβάνοντας υπόψη τις (4), (5), (6) και τον ορισμό του συνόλου $U_Q \subset \wp(Q)$, προκύπτει ότι $\forall i \in \{1,...,n\}$, $T_i \in U_Q$, οπότε $T = \{T_1,...,T_n\} \subset U_Q \subset \wp(Q)$ (7) (γράφουμε $T \subset U_Q$ αντί για $T \subseteq U_Q$, καθότι ο ορισμός του U_Q *δεν αποκλείει την ύπαρξη σ' αυτό συνόλων με μη-κενή τομή*, κάτι το οποίο γίνεται για το T μέσω της ισχύουσας συνθήκης (α)). Άρα, μέσω της (7), του Θεωρήματος 2.2 και του Λήμματος 2.2, η $\leq_{MaxU_Q}$ αποτελεί *μερική διάταξη* του T (8). Από την (8) και τον Ορισμό 2.3, για να αποδείξουμε ότι η $\leq_{MaxU_Q}$ είναι ολική διάταξη του $T = \{T_1,...,T_n\}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall j,k \in \{1,...,n\}$, $T_j \leq_{MaxU_Q} T_k$ ή $T_k \leq_{MaxU_Q} T_j$ (9). Μέσω των n εκτελέσεων των Βημάτων 2.1-2.4, προκύπτει συγκεκριμένα ότι το T_1 αποτελεί το σύνολο των μέγιστων στοιχείων του $Active(Q, \leq_Q)$, καθώς και $\forall m \in \{2,...,n\}$, το σύνολο T_m αποτελεί το σύνολο των μέγιστων στοιχείων του $Active(Q, \leq_Q) - T_1 - \cdots - T_{m-1}$, άρα από την Πρόταση 2.1(b) προκύπτει ότι $\forall x \in Active(Q, \leq_Q)$, $\exists y \in T_1 : x \leq_Q y$ (10), καθώς και $\forall m \in \{2,...,n\}$ έχουμε ότι

$\forall x \in Active(Q,\leq_Q) - T_1 - \cdots - T_{m-1}$, $\exists y \in T_m : x \leq_Q y$ (11). Εφόσον από την (3) έχουμε ότι $\forall i \in \{1,...,n\}$, $T_i \subseteq Active(Q,\leq_Q)$, τότε από την (10) και τον ορισμό της $\leq_{MaxU_Q}$ στο Θεώρημα 2.2, προκύπτει τελικά ότι $\forall i \in \{1,...,n\}$, $T_i \leq_{MaxU_Q} T_1$ (12). Επίσης, με βάση την επανάληψη των Βημάτων 2.1-2.4, προκύπτει ότι $\forall j,k \in \{1,...,n\}$ με $j > k$, το σύνολο T_j *καθορίζεται μετά από το σύνολο* T_k. Επομένως, $\forall m \in \{2,...,n\}, r \in \{m,...,n\}$, έχουμε $T_r \subseteq Active(Q,\leq_Q) - T_1 - \cdots - T_{m-1}$, πρόταση από την οποία, σε συνδυασμό με την (11) και τον ορισμό της $\leq_{MaxU_Q}$ στο Θεώρημα 2.2, προκύπτει τελικά ότι $\forall m \in \{2,...,n\}, r \in \{m,...,n\}$, $T_r \leq_{MaxU_Q} T_m$ (13). Συνδυάζοντας την (12) με την (13), προκύπτει ότι $\forall u,w \in \{1,...,n\}$ με $u \geq w$, ισχύει ότι $T_u \leq_{MaxU_Q} T_w$, οπότε η (9) ισχύει. Άρα, η $\leq_{MaxU_Q}$ είναι *ολική διάταξη* του $T = \{T_1,...,T_n\}$, όπου $T_n \leq_{MaxU_Q} \cdots \leq_{MaxU_Q} T_1$, οπότε η συνθήκη (γ) ισχύει.□

<u>Απόδειξη των Συνθηκών του Αλγόριθμου *TOWMin*</u>:

a) **Για τη συνθήκη (α):** Η απόδειξη είναι αντίστοιχη αυτής που παραθέσαμε για τη συνθήκη (α) του αλγόριθμου *TOWMax*

b) **Για τη συνθήκη (β):** Η απόδειξη είναι αντίστοιχη αυτής που παραθέσαμε για τη συνθήκη (β) του αλγόριθμου *TOWMax*

c) **Για τη συνθήκη (γ):** Σε κάθε εκτέλεση του Βήματος 2.2, το εκάστοτε σύνολο V_i, όπου $i \in \{1,...,l\}$, αποτελείται από *τα ελάχιστα στοιχεία του συνόλου* A *εκείνη τη στιγμή με βάση την* $\leq_Q$, οπότε $V_i \subseteq A$ (1). Άρα, αφού σε κάθε εκτέλεση του Βήματος 2.2, για το εκάστοτε σύνολο A ισχύει ότι $A \subseteq Active(Q,\leq_Q) \subseteq Q$ (2), τότε, από τις (1) και (2) έχουμε ότι $\forall i \in \{1,...,l\}$, $V_i \subseteq Active(Q,\leq_Q) \subseteq Q$ (3), οπότε και $V_i \in \wp(Q)$ (4). Επίσης, εφόσον το Q είναι πεπερασμένο, από την (2) προκύπτει ότι το εκάστοτε σύνολο A κάθε φορά που εκτελείται το Βήμα 2.2 είναι κι αυτό πεπερασμένο. Επιπροσθέτως,

από την συνθήκη ικανοποίησης $A \neq \emptyset$ για την επανάληψη των Βημάτων 2.1-2.4, έχουμε ως αποτέλεσμα ότι το εκάστοτε σύνολο A κάθε φορά που εκτελείται το Βήμα 2.2, εκτός από πεπερασμένο είναι και μη-κενό. Οπότε, μέσω της Πρότασης 2.1(a), του Λήμματος 2.1(b) και με βάση το γεγονός ότι τα V_i, όπου $i \in \{1,...,l\}$, αποτελούν σύνολα που περιέχουν ελάχιστα στοιχεία μη-κενών, πεπερασμένων και μερικώς διατεταγμένων συνόλων, έχουμε ότι $\forall i \in \{1,...,l\}$, $V_i \neq \emptyset$ (5), καθώς και $\forall x, y \in V_i$ με $x \neq y$, ισχύει $x \not\leq_Q y$ και $y \not\leq_Q x$ (6). Λαμβάνοντας υπόψη τις (4), (5), (6) και τον ορισμό του συνόλου $U_Q \subset \wp(Q)$, προκύπτει ότι $\forall i \in \{1,...,l\}$, $V_i \in U_Q$, οπότε $V = \{V_1,...,V_l\} \subset U_Q \subset \wp(Q)$ (7). Άρα, μέσω της (7), του Θεωρήματος 2.3 και του Λήμματος 2.2, η $\leq_{MinU_Q}$ αποτελεί *μερική διάταξη* του V (8). Από την (8) και τον Ορισμό 2.3, για να αποδείξουμε ότι η $\leq_{MinU_Q}$ είναι ολική διάταξη του $V = \{V_1,...,V_l\}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\forall j,k \in \{1,...,l\}$, $V_j \leq_{MinU_Q} V_k$ ή $V_k \leq_{MinU_Q} V_j$ (9). Μέσω των l εκτελέσεων των Βημάτων 2.1-2.4, προκύπτει συγκεκριμένα ότι το V_1 αποτελεί το σύνολο των ελάχιστων στοιχείων του $Active(Q,\leq_Q)$, καθώς και $\forall m \in \{2,...,l\}$, το σύνολο V_m αποτελεί το σύνολο των ελάχιστων στοιχείων του $Active(Q,\leq_Q) - V_1 - \cdots - V_{m-1}$, άρα από την Πρόταση 2.1(b) προκύπτει ότι $\forall x \in Active(Q,\leq_Q)$, $\exists y \in V_1 : y \leq_Q x$ (10), καθώς και $\forall m \in \{2,...,n\}$ έχουμε ότι $\forall x \in Active(Q,\leq_Q) - V_1 - \cdots - V_{m-1}$, $\exists y \in V_m : y \leq_Q x$ (11). Εφόσον από την (3) έχουμε ότι $\forall i \in \{1,...,l\}$, $V_i \subseteq Active(Q,\leq_Q)$, τότε από την (10) και τον ορισμό της $\leq_{MinU_Q}$ στο Θεώρημα 2.3, προκύπτει τελικά ότι $\forall i \in \{1,...,l\}$, $V_1 \leq_{MinU_Q} V_i$ (12). Επίσης, με βάση την επανάληψη των Βημάτων 2.1-2.4, προκύπτει ότι $\forall j,k \in \{1,...,l\}$ με $j > k$, το σύνολο V_j *καθορίζεται μετά από το σύνολο* V_k. Επομένως, $\forall m \in \{2,...,l\}, r \in \{m,...,l\}$, έχουμε $V_r \subseteq Active(Q,\leq_Q) - V_1 - \cdots - V_{m-1}$,

πρόταση από την οποία, σε συνδυασμό με την (11) και τον ορισμό της $\leq_{MinU_Q}$ στο Θεώρημα 2.3, προκύπτει τελικά ότι $\forall m \in \{2,...,l\}, r \in \{m,...,l\}$, $V_m \leq_{MinU_Q} V_r$ (13). Συνδυάζοντας την (12) με την (13), προκύπτει ότι $\forall u, w \in \{1,...,l\}$ με $u \leq w$, ισχύει ότι $V_u \leq_{MinU_Q} V_w$, οπότε η (9) ισχύει. Άρα, η $\leq_{MinU_Q}$ είναι *ολική διάταξη* του $V = \{V_1,...,V_l\}$, όπου $V_1 \leq_{MinU_Q} \cdots \leq_{MinU_Q} V_l$, οπότε η συνθήκη (γ) ισχύει.□

Έχοντας, πλέον, παρουσιάσει, αναλύσει και αποδείξει τους αλγόριθμους *TOWMax* και *TOWMin*, περνάμε σε ένα ενδεικτικό παράδειγμα, όπου αυτοί τίθενται σε πλήρη εφαρμογή.

Παράδειγμα 3.8: Έστω το πεπερασμένο σύνολο $X/\approx_X = \{\{1\},\{2\},\{3,4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8,9\}\}$, καθώς και η μερική διάταξή του $\leq_{X/\approx_X}$ στο Παράδειγμα 3.7. Εφόσον $Active(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X}) = \{\{1\},\{3,4\},\{5\},\{6\},\{7\}\} \neq$ Ø, καθώς και $\{3,4\} \leq_{X/\approx_X} \{1\}$, $\{7\} \leq_{X/\approx_X} \{3,4\}$, $\{7\} \leq_{X/\approx_X} \{1\}$, $\{7) \leq_{X/\approx_X} \{5\}$ και $\{6\} \leq_{X/\approx_X} \{5\}$ για τον αλγόριθμο *TOWMax*, έχουμε:

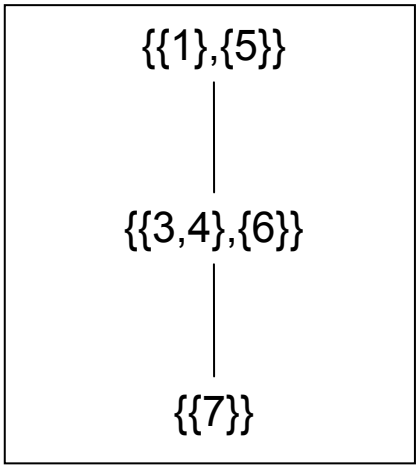
1η Εκτέλεση Βημάτων 2.1-2.4: $T_1 = \{\omega \in \{\{1\},\{3,4\},\{5\},\{6\},\{7\}\} | \neg\exists z \in \{\{1\},\{3,4\},\{5\},\{6\},\{7\}\}$ με $\omega \neq z : \omega \leq_{X/\approx_X} z\}$ = $\{\{1\},\{5\}\}$, $A = \{\{1\},\{3,4\},\{5\},\{6\},\{7\}\} - \{\{1\},\{5\}\} = \{\{3,4\},\{6\},\{7\}\}$.

2η Εκτέλεση Βημάτων 2.1-2.4: $T_2 = \{\omega \in \{\{3,4\},\{6\},\{7\}\} | \neg\exists z \in \{\{3,4\},\{6\},\{7\}\}$ με $\omega \neq z : \omega \leq_{X/\approx_X} z\}$ = $\{\{3,4\},\{6\}\}$, $A = \{\{3,4\},\{6\},\{7\}\} - \{\{3,4\},\{6\}\} = \{\{7\}\}$.

3η Εκτέλεση Βημάτων 2.1-2.4: $T_3 = \{\omega \in \{\{7\}\} | \neg\exists z \in \{\{7\}\}$ με $\omega \neq z : \omega \leq_{X/\approx_X} z\}$ = $\{\{7\}\}$, $A = \{\{7\}\} - \{\{7\}\} = \emptyset$.

Όπως βλέπουμε, μετά την τρίτη εκτέλεση των Βημάτων 2.1-2.4, το σύνολο A είναι κενό, άρα το Βήμα 2 τελειώνει. Έτσι, στο Βήμα 3, ο *TOWMax* επιστρέφει το σύνολο $T = \{T_1, T_2, T_3\} = \{\{\{1\},\{5\}\},\{\{3,4\},\{6\}\},\{\{7\}\}\}$, για το οποίο, όπως είδαμε παραπάνω, ισχύει ότι $\{\{7\}\} \leq_{MaxU_{X/\approx_X}} \{\{3,4\},\{6\}\} \leq_{MaxU_{X/\approx_X}} \{\{1\},\{5\}\}$, όπου $\leq_{MaxU_{X/\approx_X}}$ η μερική διάταξη που αποτελεί μετάβαση της $\leq_{X/\approx_X}$ από το

$X/\approx_X$ στο $T \subset \wp(X/\approx_X)$ (Θεώρημα 2.2). Η Εικόνα 3.20 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του T μέσω της $\leq_{MaxU_{X/\approx_X}}$, όπου και φαίνεται ξεκάθαρα η ολική διάταξη που συσχετίζει τα ενεργά στοιχεία του $X/\approx_X$ με βάση τον *TOWMax*.



Εικόνα 3.20 - Το διάγραμμα Hasse του T μέσω της $\leq_{MaxU_{X/\approx_X}}$

Αντίστοιχα, για τον αλγόριθμο *TOWMin*, έχουμε:

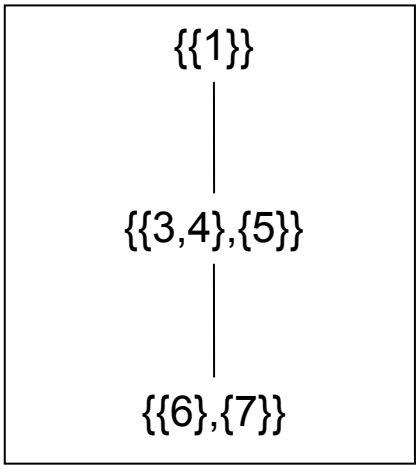
1η Εκτέλεση Βημάτων 2.1-2.4: $V_1 = \{\omega \in \{\{1\},\{3,4\},\{5\},\{6\},\{7\}\} \mid \neg\exists z \in \{\{1\},\{3,4\},\{5\},\{6\},\{7\}\}$ με $\omega \neq z : z \leq_{X/\approx_X} \omega\}$ = $\{\{6\},\{7\}\}$, $A = \{\{1\},\{3,4\},\{5\},\{6\},\{7\}\} - \{\{6\},\{7\}\} = \{\{1\},\{3,4\},\{5\}\}$.

2η Εκτέλεση Βημάτων 2.1-2.4: $V_2 = \{\omega \in \{\{1\},\{3,4\},\{5\}\} \mid \neg\exists z \in \{\{1\},\{3,4\},\{5\}\}$ με $\omega \neq z : z \leq_{X/\approx_X} \omega\} = \{\{3,4\},\{5\}\}$, $A = \{\{1\},\{3,4\},\{5\}\} - \{\{3,4\},\{5\}\} = \{\{1\}\}$.

3η Εκτέλεση Βημάτων 2.1-2.4: $V_3 = \{\omega \in \{\{1\}\} \mid \neg\exists z \in \{\{1\}\}$ με $\omega \neq z : z \leq_{X/\approx_X} \omega\} = \{\{1\}\}$, $A = \{\{1\}\} - \{\{1\}\} = \emptyset$.

Όπως βλέπουμε, μετά την τρίτη εκτέλεση των Βημάτων 2.1-2.4, το σύνολο A είναι κενό, άρα το Βήμα 2 τελειώνει. Έτσι, στο Βήμα 3, ο *TOWMin* επιστρέφει το σύνολο $V = \{V_1, V_2, V_3\} = \{\{\{6\},\{7\}\},\{\{3,4\},\{5\}\},\{\{1\}\}\}$, για το οποίο ισχύει ότι $\{\{6\},\{7\}\} \leq_{MinU_{X/\approx_X}} \{\{3,4\},\{5\}\} \leq_{MinU_{X/\approx_X}} \{\{1\}\}$, όπου $\leq_{MinU_{X/\approx_X}}$ η μερική διάταξη που αποτελεί μετάβαση της $\leq_{X/\approx_X}$ από το $X/\approx_X$ στο $V \subset \wp(X/\approx_X)$ (Θεώρημα 2.3). Η Εικόνα 3.21 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του V μέσω της $\leq_{MinU_{X/\approx_X}}$, όπου και φαίνεται ξεκάθαρα η ολική διάταξη που συσχετίζει τα

ενεργά στοιχεία του $X/\approx_X$ με βάση τον *TOWMin*. Απ' ότι παρατηρούμε, αν και ισχύει ότι $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = V_1 \cup V_2 \cup V_3 = Active(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X})$, ωστόσο $T \neq V$, γεγονός που μας οδηγεί σε *δύο διαφορετικές* ολικές διατάξεις που σχετίζονται με τη μερική διάταξη $\leq_{X/\approx_X}$ του $Active(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X})$.□



Εικόνα 3.21 - Το διάγραμμα Hasse του V μέσω της $\leq_{MinU_{X/\approx_X}}$

Όπως βλέπουμε από την ισχύουσα συνθήκη (γ) των *TOWMax* και *TOWMin* στις Εικόνες 3.18 και 3.19, η ολική διάταξη των συνόλων-αποτελεσμάτων τους, T και V, λαμβάνει χώρα μέσω των μερικών διατάξεων δυναμοσυνόλου που παραθέσαμε στα Θεωρήματα 2.2 και 2.3 αντίστοιχα. Όμως, όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2, οι ορισμοί των μερικών αυτών διατάξεων *δεν είναι ισοδύναμοι*, πράγμα που μας οδηγεί σε *διαφορετική σημασιολογία* της ολικής διάταξης των ενεργών στοιχείων του εκάστοτε μερικώς διατεταγμένου συνόλου από τους παραπάνω αλγόριθμους. Πιο συγκεκριμένα:

a) Στον αλγόριθμο *TOWMax*, μέσω του ορισμού της μερικής διάταξης δυναμοσυνόλου του Θεωρήματος 2.2, το γεγονός ότι ένα σύνολο-στοιχείο T_i του συνόλου-αποτελέσματος T *προηγείται* ενός άλλου συνόλου-στοιχείου T_j μεταφράζεται στο ότι *για κάθε στοιχείο του T_j υπάρχει στοιχείο του T_i που να προηγείται αυτού μέσω της μερικής διάταξης του συνόλου-εισόδου*. Δεδομένης αυτής της συνθήκης, η θέση κάθε ενεργού στοιχείου του συνόλου-εισόδου στην ολική διάταξη που κατασκευάζεται από τον *TOWMax καθορίζεται με βάση*

τα στοιχεία που προηγούνται αυτού στη μερική διάταξη. Π.χ., στο Παράδειγμα 3.8, η κλάση ισοδυναμίας $\{6\}$ τοποθετείται μέσω του *TOWMax* στο *δεύτερο κατά σειρά* σύνολο της ολικής διάταξης, εφόσον υπάρχει *ένα* στοιχείο, η κλάση ισοδυναμίας $\{5\}$, που *προηγείται αυτού* μέσω της $\leq_{X/\approx_X}$ ($\{6\} \leq_{X/\approx_X} \{5\}$).

b) Ομοίως στον αλγόριθμο *TOWMin*, μέσω του ορισμού της αντίστοιχης μερικής διάταξης δυναμοσυνόλου του Θεωρήματος 2.3, το γεγονός ότι ένα σύνολο-στοιχείο V_i του συνόλου-αποτελέσματος V *προηγείται* ενός άλλου συνόλου-στοιχείου V_j μεταφράζεται στο ότι *για κάθε στοιχείο του V_i υπάρχει στοιχείο του V_j που να υπολείπεται αυτού μέσω της μερικής διάταξης του συνόλου-εισόδου*. Δεδομένης τώρα της παραπάνω συνθήκης, η θέση κάθε ενεργού στοιχείου του συνόλου-εισόδου στην ολική διάταξη που κατασκευάζεται από τον *TOWMin καθορίζεται με βάση τα στοιχεία που υπολείπονται αυτού στη μερική διάταξη*. Π.χ., στο Παράδειγμα 3.8, η κλάση ισοδυναμίας $\{6\}$ τοποθετείται μέσω του *TOWMin* στο *τρίτο και τελευταίο κατά σειρά* σύνολο της ολικής διάταξης, εφόσον *δεν* υπάρχει κάποιο στοιχείο που να *έπεται* αυτού μέσω της $\leq_{X/\approx_X}$.

Απ' ότι παρατηρούμε, δεδομένου ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου-εισόδου και με βάση τις παραπλήσιες, αλλά *διαφορετικές*, μεθοδολογίες που ακολουθούνται από τους *TOWMax* και *TOWMin*, είναι δυνατό ένα ενεργό στοιχείο του συνόλου να τοποθετηθεί σε *διαφορετικές* θέσεις των αντίστοιχων ολικών διατάξεων που κατασκευάζονται από τους αλγόριθμους αυτούς. Ωστόσο, *και οι δύο παραπάνω μεθοδολογίες ανταποκρίνονται στη σημασιολογία της μερικής διάταξης του συνόλου-εισόδου*, οπότε και μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάλλιστα μια εκ των δύο για τον καθορισμό της ολικής διάταξης των ενεργών στοιχείων.

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.8, με βάση το πεπερασμένο σύνολο $X/\approx_X$ και τη μερική διάταξή του $\leq_{X/\approx_X}$ (όπου $Active(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X}) \neq \emptyset$), οι αλγόριθμοι *TOWMax* και *TOWMin* επέστρεψαν δύο υποσύνολα του $\wp(X/\approx_X)$ που είχαν *ίδιο μέγεθος*. *Αυτό το γεγονός ισχύει γενικά για οποιοδήποτε μη-κενό, πεπερασμένο και μερικώς διατεταγμένο σύνολο στο*

οποίο μπορούν να εφαρμοστούν οι δύο αλγόριθμοι, δηλαδή επιστρέφουν *πάντα* τον ίδιο αριθμό συνόλων, τα οποία, όμως, είναι δυνατόν να έχουν διαφορετικά αποτελέσματα. Για να μπορέσουμε να τεκμηριώσουμε την σημαντική αυτή υπόθεση, προχωράμε στον προσδιορισμό ενός αριθμού από χαρακτηριστικές έννοιες που πρόκειται να μας βοηθήσουν, στις οποίες το μερικώς διατεταγμένο σύνολο που αναφέρεται υποθέτουμε ότι είναι μη-κενό και πεπερασμένο:

Ορισμός 3.10: *Έστω σύνολο* Q *μερικώς διατεταγμένο ως προς* $\leq_Q$. *Μια μη-κενή και πεπερασμένη ακολουθία* $\hat{a} = (q_1,...,q_n)$, *με* $n \geq 1$, *για την οποία:*

a) $\forall i \in \{1,...,n\}$, $q_i \in Q$

b) $\forall j,k \in \{1,...,n\}$ *με* $j \neq k$, $q_j \neq q_k$, *και*

c) $\forall l,m \in \{1,...,n\}$ *με* $l < m$, $q_l \leq_Q q_m$,

αποτελεί μια ακολουθία διακριτών στοιχείων (sequence of discrete elements) του Q *με βάση την* $\leq_Q$ *και το σύνολο όλων αυτών των ακολουθιών συμβολίζεται ως* $SDE_{Q,\leq_Q}$. □

Όπως παρατηρούμε από τον παραπάνω ορισμό, αφού το Q είναι μη-κενό και πεπερασμένο, τότε και το $SDE_{Q,\leq_Q}$ *είναι μη-κενό και πεπερασμένο*. Π.χ., για το σύνολο $X/\approx_X = \{\{1\},\{2\},\{3,4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8,9\}\}$ και τη μερική διάταξή του $\leq_{X/\approx_X}$ στο Παράδειγμα 3.7, έχουμε $SDE_{X/\approx_X,\leq_{X/\approx_X}} = \{(\{1\}), (\{2\}), (\{3,4\}), (\{5\}), (\{6\}), (\{7\}), (\{8,9\}), (\{6\},\{5\}), (\{7\},\{5\}), (\{7\},\{3,4\}), (\{3,4\},\{1\}), (\{7\},\{1\}), (\{7\},\{3,4\},\{1\})\} \neq \emptyset$. Όπως παρατηρούμε, οι ακολουθίες $(\{1\})$, $(\{2\})$, $(\{3,4\})$, $(\{5\})$, $(\{6\})$, $(\{7\})$ και $(\{8,9\})$, αν και περιέχουν *μόνο ένα στοιχείο*, *ωστόσο ανήκουν* στο $SDE_{X/\approx_X,\leq_{X/\approx_X}}$, εφόσον οι συνθήκες b) και c) του Ορισμού 3.10 είναι προφανώς αληθείς (vacuously true) για αυτές.

Μέσω του Ορισμού 3.10 και του Λήμματος 2.2, έχουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 3.5: *Έστω σύνολο* Q *μερικώς διατεταγμένο ως προς* $\leq_Q$. *Τότε,* $\forall S \subseteq Q$ *με* $S \neq \emptyset$, *ισχύει ότι* $SDE_{S,\leq_Q} \subseteq SDE_{Q,\leq_Q}$.□

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω, λοιπόν, ότι $\exists S' \subseteq Q$ με $S' \neq \emptyset$, τέτοιο ώστε $SDE_{S',\leq_Q} \not\subseteq SDE_{Q,\leq_Q}$, δηλαδή $\exists \hat{a}' = (q'_1,...,q'_n) \in SDE_{S',\leq_Q}$, με $n \geq 1$, τέτοια ώστε $\hat{a}' \notin SDE_{Q,\leq_Q}$ (1). Εφόσον $\hat{a}' \in SDE_{S',\leq_Q}$, τότε από τον Ορισμό 3.10 έχουμε ότι $\forall i \in \{1,...,n\}$, $q'_i \in S'$ (2), $\forall j,k \in \{1,...,n\}$ με $j \neq k$, $q'_j \neq q'_k$ (3) και $\forall l,m \in \{1,...,n\}$ με $l < m$, $q'_l \leq_Q q'_m$ (4). Επίσης, αφού $S' \subseteq Q$, από την (2) προκύπτει ότι $\forall i \in \{1,...,n\}$, $q'_i \in Q$ (5), οπότε, μέσω των (5),(3) και (4), καθώς και του Ορισμού 3.10, έχουμε ότι $\hat{a}' \in SDE_{Q,\leq_Q}$, πρόταση που αναιρεί την (1), άρα καταλήγουμε σε άτοπο. □

Μεταξύ των ακολουθιών διακριτών στοιχείων ενός μη-κενού, πεπερασμένου και μερικώς διατεταγμένου συνόλου, υπάρχουν κάποιες με ιδιαίτερη σημασία:

Ορισμός 3.11: *Έστω σύνολο* Q *μερικώς διατεταγμένο ως προς* $\leq_Q$. *Μια ακολουθία* $\hat{b} \in SDE_{Q,\leq_Q}$, *για την οποία* $\neg\exists \hat{a} \in SDE_{Q,\leq_Q} : |\hat{a}| > |\hat{b}|$ *(όπου* $|\hat{a}|$, $|\hat{b}|$ *το πλήθος των στοιχείων των* $\hat{a}$ *και* $\hat{b}$ *αντίστοιχα), είναι μια μέγιστη ακολουθία διακριτών στοιχείων (maximal sequence of discrete elements) του* Q *με βάση την* $\leq_Q$ *και το σύνολο όλων αυτών των ακολουθιών συμβολίζεται ως* $\max(SDE_{Q,\leq_Q})$.□

Απ' ότι βλέπουμε από τον Ορισμό 3.11, εφόσον, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, το $SDE_{Q,\leq_Q}$ *είναι μη-κενό και πεπερασμένο*, *τότε και το σύνολο* $\max(SDE_{Q,\leq_Q}) \subseteq SDE_{Q,\leq_Q}$ *είναι μη-κενό και πεπερασμένο*. Π.χ., για το σύνολο $X/\approx_X$ και τη μερική διάταξή του $\leq_{X/\approx_X}$ στο Παράδειγμα 3.7, όπου $SDE_{X/\approx_X,\leq_{X/\approx_X}} = \{(\{1\}), (\{2\}), (\{3,4\}), (\{5\}), (\{6\}), (\{7\}), (\{8,9\}), (\{6\},\{5\}), (\{7\},\{5\}), (\{7\},\{3,4\}), (\{3,4\},\{1\}), (\{7\},\{1\}), (\{7\},\{3,4\},\{1\})\} \neq \emptyset$, έχουμε ότι $|(\{1\})| = |(\{2\})| = |(\{3,4\})| = |(\{5\})| = |(\{6\})| = |(\{7\})| = |(\{8,9\})| = 1$,

$|(\{6\},\{5\})|$ = $|(\{7\},\{5\})|$ = $|(\{7\},\{3,4\})|$ = $|(\{3,4\},\{1\})|$ = $|(\{7\},\{1\})|$ = 2 και $|(\{7\},\{3,4\},\{1\})|$ = 3, άρα η ακολουθία $(\{7\},\{3,4\},\{1\}) \in SDE_{X/\approx_X,\leq_{X/\approx_X}}$ αποτελεί τη μοναδική μέγιστη ακολουθία διακριτών στοιχείων του $X/\approx_X$ με βάση την $\leq_{X/\approx_X}$, οπότε $\max(SDE_{X/\approx_X,\leq_{X/\approx_X}}) = \{(\{7\},\{3,4\},\{1\})\} \neq \emptyset$.

Μέσω του Ορισμού 3.11, παρατηρούμε ότι $\forall \hat{a},\hat{b} \in \max(SDE_{Q,\leq_Q})$, $|\hat{a}| = |\hat{b}|$. Με άλλα λόγια, *οι εκάστοτε μέγιστες ακολουθίες διακριτών στοιχείων ενός μη-κενού, πεπερασμένου και μερικώς διατεταγμένου συνόλου με βάση τη μερική διάταξη που το χαρακτηρίζει, έχουν ίδιο πλήθος στοιχείων*. Από το γεγονός αυτό, προχωράμε στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 3.12: *Μέγιστο μέγεθος ακολουθίας διακριτών στοιχείων (maximal sequence size of discrete elements),* $MaxSSDE_{Q,\leq_Q}$*, ενός συνόλου* Q *με βάση την μερική του διάταξη* $\leq_Q$*, ονομάζεται το πλήθος των στοιχείων κάθε ακολουθίας που ανήκει στο* $\max(SDE_{Q,\leq_Q})$.□

Π.χ., για το σύνολο $X/\approx_X$ και τη μερική διάταξή του $\leq_{X/\approx_X}$ στο Παράδειγμα 3.7, όπου $\max(SDE_{X/\approx_X,\leq_{X/\approx_X}}) = \{(\{7\},\{3,4\},\{1\})\}$, έχουμε ότι $MaxSSDE_{X/\approx_X,\leq_{X/\approx_X}} = |(\{7\},\{3,4\},\{1\})| = 3$.

Μέσω των Ορισμών 3.10, 3.11 και 3.12, προκύπτει ένα αξιόλογο λήμμα, το οποίο και παρουσιάζεται παρακάτω:

Λήμμα 3.6: *Έστω σύνολο* Q *μερικώς διατεταγμένο ως προς* $\leq_Q$*. Τότε:*

a) Αν $\max(SDE_{Q,\leq_Q}) = SDE_{Q,\leq_Q}$*, τότε* $MaxSSDE_{Q,\leq_Q} = 1$*, και*

b) Αν $\max(SDE_{Q,\leq_Q}) \neq SDE_{Q,\leq_Q}$*, τότε* $\forall \hat{a} \in SDE_{Q,\leq_Q} - \max(SDE_{Q,\leq_Q})$, $|\hat{a}| < MaxSSDE_{Q,\leq_Q}$.□

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο για κάθε περίπτωση χωριστά. Συγκεκριμένα:

a) Έστω ότι η πρώτη περίπτωση δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχει σύνολο Q' μη-κενό, πεπερασμένο και μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_Q$

τέτοιο ώστε $\max(SDE_{Q',\leq_Q}) = SDE_{Q',\leq_Q}$ και $MaxSSDE_{Q',\leq_Q} > 1$. Όμως, εφόσον από τον Ορισμό 3.11 ισχύει ότι $\max(SDE_{Q',\leq_Q}) \neq \emptyset$, τότε, για μια ακολουθία $\hat{a}' = (q'_1,...,q'_t) \in \max(SDE_{Q',\leq_Q}) = SDE_{Q',\leq_Q}$, όπου $t = MaxSSDE_{Q',\leq_Q} > 1$, η ακολουθία $\hat{b}' = (q'_1,...,q'_{t-1})$ ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες του Ορισμού 3.10 για το Q' και την $\leq_Q$, οπότε $\hat{b}' \in SDE_{Q',\leq_Q}$ (4). Επίσης, βλέπουμε ότι $|\hat{b}'| = t-1 < t = |\hat{a}'|$, άρα και $\hat{b}' \notin \max(SDE_{Q',\leq_Q})$ (5), εφόσον παραβιάζεται ο Ορισμός 3.11. Οπότε, από τις (4) και (5) προκύπτει ότι $\max(SDE_{Q',\leq_Q}) \neq SDE_{Q',\leq_Q}$, πρόταση που αναιρεί την αρχική μας υπόθεση ($\max(SDE_{Q',\leq_Q}) = SDE_{Q',\leq_Q}$), άρα καταλήγουμε σε άτοπο, επομένως η πρώτη περίπτωση ισχύει.

b) Έστω ότι η δεύτερη περίπτωση δεν ισχύει, δηλαδή $\exists \hat{c} \in SDE_{Q,\leq_Q} - \max(SDE_{Q,\leq_Q}) \neq \emptyset$, τέτοια ώστε $|\hat{c}| \geq MaxSSDE_{Q,\leq_Q}$ (6). Εφόσον $\hat{c} \in SDE_{Q,\leq_Q}$ και $\hat{c} \notin \max(SDE_{Q,\leq_Q})$, τότε, μέσω του Ορισμού 3.11 και του γεγονότος ότι $\max(SDE_{Q,\leq_Q}) \neq \emptyset$, $\exists \hat{d} \in \max(SDE_{Q,\leq_Q})$ τέτοια ώστε $|\hat{d}| > |\hat{c}|$, η οποία, σε συνδυασμό με την (6), μας δίνει ότι $|\hat{d}| > MaxSSDE_{Q,\leq_Q}$ (7). Όμως, αφού $\hat{d} \in \max(SDE_{Q,\leq_Q})$, από τον Ορισμό 3.12 έχουμε ότι $|\hat{d}| = MaxSSDE_{Q,\leq_Q}$ (8). Όπως βλέπουμε οι (7) και (8) αναιρούν η μια την άλλη, άρα καταλήγουμε σε άτοπο, επομένως η δεύτερη περίπτωση ισχύει. □

Επίσης, ανακαλώντας τους ορισμούς των μέγιστων και ελάχιστων στοιχείων ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου (Ορισμοί 2.6, 2.7), για τις εκάστοτε μέγιστες ακολουθίες διακριτών στοιχείων ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.2: *Έστω σύνολο Q μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_Q$. Τότε, το πρώτο και το τελευταίο στοιχείο κάθε μέγιστης ακολουθίας διακριτών στοιχείων*

του Q με βάση την $\leq_Q$, αποτελεί, αντίστοιχα, ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο του Q με βάση την $\leq_Q$.□

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω, λοιπόν, ότι $\exists \hat{c} = (q_1'',...,q_n'') \in \max(SDE_{Q,\leq_Q}) \subseteq SDE_{Q,\leq_Q}$, με $n \geq 1$, για την οποία ισχύει *τουλάχιστον μια* από τις παρακάτω προτάσεις:

(1) Το q_n'' *δεν είναι μέγιστο στοιχείο του Q με βάση την $\leq_Q$*, δηλαδή $\exists z \in Q$ με $z \neq q_n''$, τέτοιο ώστε $q_n'' \leq_Q z$,

(2) Το q_1'' *δεν είναι ελάχιστο στοιχείο του Q με βάση την $\leq_Q$*, δηλαδή $\exists z' \in Q$ με $z' \neq q_1''$, τέτοιο ώστε $z' \leq_Q q_1''$.

Τώρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε μια από τις προτάσεις (1) και (2) οδηγεί σε άτοπο. Συγκεκριμένα, έχουμε:

a) **Για την πρόταση (1):** Εφόσον $\hat{c} = (q_1'',...,q_n'') \in SDE_{Q,\leq_Q}$, τότε με βάση τον Ορισμό 3.10 ισχύει ότι $\forall j,k \in \{1,...,n\}$ με $j \neq k$, $q_j'' \neq q_k''$ (3), καθώς και $\forall l,m \in \{1,...,n\}$ με $l < m$, $q_l'' \leq_Q q_m''$ (4). Όμως, αφού $z \neq q_n''$ και $q_n'' \leq_Q z$, τότε, με βάση τις (3) και (4), καθώς και τις ιδιότητες της μεταβατικότητας και αντισυμμετρικότητας της $\leq_Q$ στο Q (ως μερική διάταξη του Q), προκύπτει ότι $\forall t \in \{1,...,n\}$, $q_t'' \leq_Q z$ και $z \neq q_t''$ (5). Άρα, μέσω των (3), (4) και (5), η ακολουθία $\hat{d} = (q_1'',...,q_n'',z)$ αποτελεί *ακολουθία διακριτών στοιχείων του Q με βάση την $\leq_Q$*, οπότε $\hat{d} \in SDE_{Q,\leq_Q}$. Όμως, όπως παρατηρούμε, $|\hat{d}| = |\hat{c}| + 1 > |\hat{c}|$, άρα $\hat{c} \notin \max(SDE_{Q,\leq_Q})$ (εφόσον παραβιάζεται ο Ορισμός 3.11), οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

b) **Για την πρόταση (2):** Εφόσον $z' \neq q_1''$ και $z' \leq_Q q_1''$, τότε, με βάση τις (3) και (4), καθώς και τις ιδιότητες της μεταβατικότητας και αντισυμμετρικότητας της $\leq_Q$ στο Q (ως μερική διάταξη του Q), προκύπτει ότι $\forall t \in \{1,...,n\}$, $z' \leq_Q q_t''$ και $z' \neq q_t''$ (6). Άρα, μέσω των (3), (4) και (6), η ακολουθία $\hat{e} = (z', q_1'',...,q_n'')$ αποτελεί ακολουθία διακριτών στοιχείων του Q με βάση την $\leq_Q$, οπότε $\hat{e} \in SDE_{Q,\leq_Q}$.

Όμως, όπως βλέπουμε, $|\hat{e}| = 1 + |\hat{c}| > |\hat{c}|$, άρα $\hat{c} \notin \max(SDE_{Q,\leq_Q})$ (εφόσον παραβιάζεται ο Ορισμός 3.11), οπότε καταλήγουμε ξανά σε άτοπο.

Επομένως, αφού και στις δύο προτάσεις καταλήγουμε σε άτοπο, τότε *δεν υπάρχει* μέγιστη ακολουθία διακριτών στοιχείων του Q με βάση την $\leq_Q$ που να παραβιάζει το Θεώρημα 3.2, άρα το θεώρημα αυτό ισχύει. □

Όλοι οι επιπρόσθετοι ορισμοί, θεωρήματα και λήμματα που παραθέσαμε παραπάνω, αποτελούν το θεωρητικό υπόβαθρο του παρακάτω θεωρήματος, το οποίο και επιβεβαιώνει την αρχική μας υπόθεση:

Θεώρημα 3.3: *Έστω σύνολο Q μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_Q$, τέτοιο ώστε $Active(Q,\leq_Q) \neq Ø$. Τότε, τα σύνολα $T = \{T_1,...,T_n\}$ και $V = \{V_1,...,V_l\}$ που επιστρέφονται από τους αλγόριθμους TOWMax και TOWMin αντίστοιχα, έχουν ίδιο μέγεθος και ίσο με $MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q}$ (δηλαδή $n = l = MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q}$).*□

<u>Απόδειξη</u>: Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $n = MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q}$. Όπως ξέρουμε, το πεπερασμένο σύνολο $Active(Q,\leq_Q) \subseteq Q$, μέσω του Λήμματος 2.2, είναι μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_Q$. Οπότε, αφού $Active(Q,\leq_Q) \supset Active(Q,\leq_Q) - T_1 \supset \cdots \supset Active(Q,\leq_Q) - T_1 - \cdots - T_{n-1}$ (1), από το Λήμμα 2.2 προκύπτει ότι και τα πεπερασμένα σύνολα $Active(Q,\leq_Q) - T_1$,..., $Active(Q,\leq_Q) - T_1 - \cdots - T_{n-1}$ είναι μερικώς διατεταγμένα ως προς $\leq_Q$ (2). Επίσης, με βάση τη συνθήκη ικανοποίησης $A \neq Ø$ για την εκτέλεση των Βημάτων 2.1-2.4 του *TOWMax*, ισχύει ότι τα πεπερασμένα σύνολα $Active(Q,\leq_Q) - T_1$,..., $Active(Q,\leq_Q) - T_1 - \cdots - T_{n-1}$ είναι και μη-κενά (3). Από την πρώτη εκτέλεση των Βημάτων 2.1-2.4 του *TOWMax*, προκύπτει ότι το T_1 αποτελείται από τα μέγιστα στοιχεία του $Active(Q,\leq_Q)$ με βάση την $\leq_Q$, όποτε, από τις (1),(2) και (3), καθώς και από το Λήμμα 3.5 και το Θεώρημα 3.2, έχουμε ότι $SDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1,\leq_Q} \subseteq SDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q} - \max(SDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q})$, πρόταση από την οποία, μέσω της (3), του Λήμματος 3.6(b) και του Ορισμού

3.12, προκύπτει ότι $MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1,\leq_Q} < MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q}$ (4). Όμως, όπως είδαμε στον Ορισμό 3.11, ισχύει ότι $\max(SDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q}) \neq \emptyset$. Οπότε, δεδομένης μιας ακολουθίας διακριτών στοιχείων $\hat{a}' = (q'_1,...,q'_t) \in \max(SDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q}) \subset SDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q}$, όπου $t = MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q}$, από το Θεώρημα 3.2, τη συνθήκη (c) του Ορισμού 3.10 και το Λήμμα 2.1(a) προκύπτει ότι $q'_t \in T_1$, καθώς και $\forall i \in \{1,...,t-1\}$, $q'_i \notin T_1$. Άρα, η ακολουθία $\hat{b}' = (q'_1,...,q'_{t-1})$ ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες του Ορισμού 3.10 για το $Active(Q,\leq_Q) - T_1$ και την $\leq_Q$, οπότε $\hat{b}' \in SDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1,\leq_Q}$ (5). Όπως βλέπουμε, εφόσον $\hat{b}' = (q'_1,...,q'_{t-1})$, τότε $|\hat{b}'| = t-1 = MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q} - 1$ (6), οπότε από τις (4),(5) και (6) έχουμε ότι $MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1,\leq_Q} = MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q} - 1$ (7). Επίσης, από την m-οστή εκτέλεση των Βημάτων 2.1-2.4 του *TOWMax*, όπου $\forall m \in \{2,...,n\}$, προκύπτει ότι το T_m αποτελείται από τα μέγιστα στοιχεία του $Active(Q,\leq_Q) - T_1 - \cdots - T_{m-1}$ με βάση την $\leq_Q$, όποτε, από τις (1),(2) και (3), καθώς και από το Λήμμα 3.5 και το Θεώρημα 3.2, ισχύει ότι *αν* $n > 2$, τότε $\forall j \in \{2,...,n-1\}$, $SDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_j,\leq_Q} \subseteq SDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{j-1},\leq_Q} - \max(SDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{j-1},\leq_Q})$, από την οποία, μέσω της (3), του Λήμματος 3.6(b) και του Ορισμού 3.12, προκύπτει ότι *αν* $n > 2$, τότε $\forall j \in \{2,...,n-1\}$, $MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_j,\leq_Q} < MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{j-1},\leq_Q}$ (8). Όμως, όπως ξέρουμε από τον Ορισμό 3.11, για $n > 2$ ισχύει ότι $\forall j \in \{2,...,n-1\}$, $\max(SDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{j-1},\leq_Q}) \neq \emptyset$. Άρα, $\forall j \in \{2,...,n-1\}$, όπου $n > 2$, αν $\hat{a}'' = (q''_1,...,q''_t) \in \max(SDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{j-1},\leq_Q}) \subset SDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{j-1},\leq_Q}$ μια δεδομένη μέγιστη ακολουθία διακριτών στοιχείων του $Active(Q,\leq_Q) - T_1 - \cdots - T_{j-1}$ με βάση την $\leq_Q$ (με $t = MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{j-1},\leq_Q}$), τότε, μέσω του Θεωρήματος 3.2, της συνθήκης (c) του Ορισμού 3.10 και του Λήμματος 2.1(a) έχουμε ότι $q''_t \in T_j$, καθώς και $\forall i \in \{1,...,t-1\}$, $q''_i \notin T_j$. Άρα, η ακολουθία $\hat{b}'' = (q''_1,...,q''_{t-1})$ ικανοποιεί

τις τρεις συνθήκες του Ορισμού 3.10 για το $Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_j$ και την $\leq_Q$, οπότε $\hat{b}''\in SDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_j,\leq_Q}$ (9). Απ' ότι παρατηρούμε, εφόσον $\hat{b}''=(q_1'',...,q_{t-1}'')$, τότε $|\hat{b}''|=t-1=MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{j-1},\leq_Q}-1$ (10), άρα από τις (8),(9),(10) έχουμε ότι αν $n>2$, τότε $\forall j\in\{2,...,n-1\}$, $MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_j,\leq_Q}=MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{j-1},\leq_Q}-1$ (11). Τέλος, από την ισχύουσα συνθήκη (β) του *TOWMax*, έχουμε ότι $T_n=Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{n-1}$ (12). Όμως, όπως ξέρουμε, το T_n αποτελείται από τα μέγιστα στοιχεία του $Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{n-1}$ με βάση την $\leq_Q$, οπότε, από την (12) και το Λήμμα 2.1(a) προκύπτει ότι $\forall x,y\in Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{n-1}$ με $x\neq y$, ισχύει $x\not\leq_Q y$ και $y\not\leq_Q x$, πρόταση από την οποία, μέσω του Ορισμού 3.10, έχουμε ότι $\forall\hat{a}\in SDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{n-1},\leq_Q}$, $|\hat{a}|=1$ (13). Οπότε, με βάση την (13) και τον Ορισμό 3.11 καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\max(SDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{n-1},\leq_Q})=SDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{n-1},\leq_Q}$, άρα, μέσω του Λήμματος 3.6(a), $MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1-\cdots-T_{n-1},\leq_Q}=1$ (14). Εφόσον $n>1$ (από το Λήμμα 3.4), τότε, λαμβάνοντας υπόψη τις (7),(11) και (14), έχουμε:

a) Αν $n=2$, τότε από την (14) έχουμε ότι $MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1,\leq_Q}=1$, οπότε η (7) μας δίνει ότι $1=MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q}-1$, άρα $MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q}=2=n$.

b) Αν $n>2$, τότε από τις (14) και (11) προκύπτει ότι $MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q)-T_1,\leq_Q}=n-1$, οπότε η (7) μας δίνει ότι $n-1=MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q}-1$, άρα $MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q}=n$.

Οπότε, $n=MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q}$. Ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία και για το σύνολο $V=\{V_1,...,V_l\}$ που επιστρέφει ο αλγόριθμος *TOWMin*, αποδεικνύεται, επίσης, ότι $l=MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q}$, από το οποίο και παίρνουμε τελικά ότι $n=l=MaxSSDE_{Active(Q,\leq_Q),\leq_Q}$.□

Έχοντας πλέον δημιουργήσει, μέσω των αλγόριθμων *TOWMax* και *TOWMin*, δύο ολικές διατάξεις που σχετίζονται με τη μερική διάταξη των ενεργών στοιχείων (εφόσον υπάρχουν τέτοια) ενός μη-κενού, πεπερασμένου και μερικώς διατεταγμένου συνόλου, τότε, σε συνδυασμό με την υπόθεσή μας ότι η οθόνη με τα πιθανά μη-ενεργά στοιχεία του συνόλου πρέπει να έπεται *όλων των οθονών των πιθανών ενεργών*, είναι απαραίτητη η κατασκευή μιας *τελικής δομής πληροφορίας που:*

a) *Να σχετίζεται με όλα τα στοιχεία (ενεργά και μη-ενεργά) του συνόλου,*
b) *Να υπακούει σε μια από τις δύο (ολικές) διατάξεις των συνόλων-αποτελεσμάτων των αλγόριθμων TOWMax και TOWMin, καθώς και στην υπόθεσή μας για τη διάταξη μεταξύ ενεργών και μη-ενεργών στοιχείων, και*
c) *Να μπορούμε να καθορίσουμε μέσω αυτής την αλληλουχία οθονών αποτελεσμάτων*.

Αυτό μπορεί να γίνει με τον αλγόριθμο *FinalTotalOrder (FinTO)* που παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.22, ο οποίος και χρησιμοποιεί έναν εκ των *TOWMax* και *TOWMin* για τη διάταξη των ενεργών στοιχείων. Απ’ ότι βλέπουμε, η επιλογή αυτή αφήνεται στο χρήστη:

Είσοδος: Μη-κενό και πεπερασμένο σύνολο Q μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_Q$, boolean μεταβλητή *FlagMaxMin* (0 για χρήση *TOWMax*, 1 για χρήση *TOWMin*)

Έξοδος: Σύνολο $F = \{F_1,...,F_m\}$, με $m \geq 1$, τέτοιο ώστε,

(α) $\forall i, j \in \{1,...,m\}$ με $i \neq j$, $F_i \cap F_j = \emptyset$

(β) $\bigcup_{k=1}^{m} F_k = Q$

(γ) Η δυαδική σχέση $\leq_F$, για την οποία $\forall X, Y \in F$, $X \leq_F Y$ *αν* $X \leq_{MaxU_Q} Y$ *ή* $X \leq_{MinU_Q} Y$ *ή* $X = Inactive(Q, \leq_Q)$ (όπου $\leq_{MaxU_Q}$ και $\leq_{MinU_Q}$ οι μερικές διατάξεις που κατασκευάζονται μέσω των Θεωρημάτων 2.2 και 2.3 στο σύνολο $U_Q = \{W \in \wp(Q) / \emptyset | \forall w, w' \in W$ *με* $w \neq w'$, *να ισχύει* $w \not\leq_Q w'$ *και* $w' \not\leq_Q w\} \subset \wp(Q))$, αποτελεί ολική διάταξη του F, τέτοια ώστε $F_m \leq_F \cdots \leq_F F_1$

Σώμα:

Βήμα 1: $F := \emptyset$, $i = 0$, $A := Active(Q, \leq_Q)$, $I := Inactive(Q, \leq_Q)$

Βήμα 2: Αν $A \neq \emptyset$, **Ξεκίνα**

Βήμα 2.1: Αν *FlagMaxMin* = 0, **Ξεκίνα**

Βήμα 2.1.1: $T = \{T_1,...,T_n\}$ το σύνολο-αποτέλεσμα του *TOWMax*

Βήμα 2.1.2: Για $w = 1...n$, $F_w = T_w$

Τελείωσε

Αλλιώς, **Ξεκίνα**

Βήμα 2.1.3: $V = \{V_1,...,V_n\}$ το σύνολο-αποτέλεσμα του *TOWMin*

Βήμα 2.1.4: Για $w = 1...n$, $F_w = V_{n-w+1}$

Τελείωσε

Βήμα 2.2: Πρόσθεσε τα $F_1,...,F_n$ στο F, $i := n$

Τελείωσε

Βήμα 3: Αν $I \neq \emptyset$, **Ξεκίνα**

Βήμα 3.1: $i := i + 1$

Βήμα 3.2: $F_i = I$

Βήμα 3.3: Πρόσθεσε το F_i στο F

Τελείωσε

Βήμα 4: Επέστρεψε $F = \{F_1,...,F_m\}$, όπου $m = i$

Εικόνα 3.22 - Ο αλγόριθμος *FinTO*

Απ' ότι βλέπουμε, η διαδικασία του αλγόριθμου *FinTO* είναι πολύ απλή. Αρχικά, διαμερίζει το Q στο $Active(Q,\leq_Q)$ και στο $Inactive(Q,\leq_Q)$. Έπειτα, αν το $Active(Q,\leq_Q)$ είναι μη-κενό (οπότε και είναι εφαρμόσιμοι οι αλγόριθμοι *TOWMax* και *TOWMin*), εξετάζει, μέσω της μεταβλητής $FlagMaxMin$, ποιόν από τους αλγόριθμους *TOWMax* και *TOWMin* έχει επιλέξει ο χρήστης και, ανάλογα με την παραπάνω επιλογή, προσθέτει στο, αρχικά κενό, F τα $n>1$ στοιχεία-σύνολα του συνόλου που επιστρέφεται από τον επιλεγμένο αλγόριθμο ως αποτέλεσμα. Στη συνέχεια, αν το $Inactive(Q,\leq_Q)$ είναι μη-κενό, τότε το προσθέτει στο F. Όπως παρατηρούμε από τον *FinTO*, υπάρχουν τρεις διαφορετικές εκδοχές για το μέγεθος του $F=\{F_1,...,F_m\}$ που επιστρέφεται στο τέλος:

a) Αν $Active(Q,\leq_Q)=\emptyset$ και $Inactive(Q,\leq_Q)\neq\emptyset$, τότε το μέγεθος του F είναι 1 (δηλαδή $m=1$)

b) Αν $Active(Q,\leq_Q)\neq\emptyset$ και $Inactive(Q,\leq_Q)=\emptyset$, τότε το μέγεθος του F είναι n (δηλαδή $m=n$), όπου n το *ίδιο* (από Θεώρημα 3.3) μέγεθος των συνόλων-αποτελεσμάτων των αλγόριθμων *TOWMax* και *TOWMin* πάνω στο μη-κενό $Active(Q,\leq_Q)$

c) Αν $Active(Q,\leq_Q)\neq\emptyset$ και $Inactive(Q,\leq_Q)\neq\emptyset$, τότε το μέγεθος του F είναι $n+1$ (δηλαδή $m=n+1$), όπου n το *ίδιο* (από Θεώρημα 3.3) μέγεθος των συνόλων-αποτελεσμάτων των αλγόριθμων *TOWMax* και *TOWMin* πάνω στο μη-κενό $Active(Q,\leq_Q)$.

Τέλος, η δυαδική σχέση $\leq_F$ που επιλέξαμε για την ολική διάταξη του F, αποτελεί τη *μετουσίωση της προϋπόθεσης για υπακοή στη μερική διάταξη των πιθανών ενεργών στοιχείων, καθώς και στην υπόθεσή μας για τη διάταξη μεταξύ ενεργών και μη-ενεργών στοιχείων, εφόσον λαμβάνει υπόψη της τις* $\leq_{MaxU_Q}$ *και* $\leq_{MinU_Q}$*, οι οποίες και διατάσσουν ολικά τα σύνολα-αποτελέσματα των TOWMax* και *TOWMin αντίστοιχα, καθώς και, μέσω της συνθήκης* $X\leq_F Y$ *αν* $X=Inactive(Q,\leq_Q)$*, θέτει το* $Inactive(Q,\leq_Q)$ *στην τελευταία θέση της διάταξης.*

Μέσω της χρησιμοποίησης ενός εκ των *TOWMax* και *TOWMin* για τη διάταξη των πιθανών ενεργών στοιχείων, καθώς και της τοποθέτησης των

ενδεχόμενων μη-ενεργών στοιχείων στο τελευταίο σύνολο της διάταξης, οι αποδείξεις των συνθηκών (α), (β) και (γ) του *FinTO* είναι τετριμμένες, εφόσον βασίζονται απόλυτα στις αντίστοιχες ισχύουσες συνθήκες των *TOWMax* και *TOWMin*.

Παράδειγμα 3.9: Έστω το μη-κενό, πεπερασμένο σύνολο $X/\approx_X = \{\{1\},\{2\},\{3,4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8,9\}\}$, καθώς και η μερική διάταξή του $\leq_{X/\approx_X}$ στο Παράδειγμα 3.7. Όπως βλέπουμε, $\{3,4\} \leq_{X/\approx_X} \{1\}$, $\{7\} \leq_{X/\approx_X} \{3,4\}$, $\{7\} \leq_{X/\approx_X} \{1\}$, $\{7) \leq_{X/\approx_X} \{5\}$, $\{6\} \leq_{X/\approx_X} \{7\}$, $Inactive(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X}) = \{\{2\},\{8,9\}\}$ καθώς και $Active(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X}) = \{\{1\},\{3,4\},\{5\},\{6\},\{7\}\}$. Καθότι $Active(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X}) \neq \emptyset$, το σώμα του Βήματος 2 του *FinTO* εκτελείται, οπότε:

a) Αν $FlagMaxMin$ = 0, τότε από την εκτέλεση του *TOWMax* στο $Active(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X})$ (Παράδειγμα 3.8), έχουμε ότι $T = \{T_1, T_2, T_3\}$, όπου $T_1 = \{\{1\},\{5\}\}$, $T_2 = \{\{3,4\},\{6\}\}$ και $T_3 = \{\{7\}\}$, άρα $F_1 = T_1 = \{\{1\},\{5\}\}$, $F_2 = T_2 = \{\{3,4\},\{6\}\}$ και $F_3 = T_3 = \{\{7\}\}$.

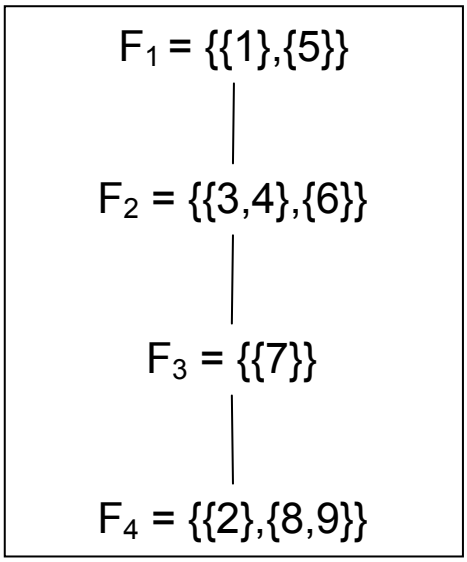
b) Αν $FlagMaxMin$ = 1, τότε από την εκτέλεση του *TOWMin* στο $Active(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X})$ (Παράδειγμα 3.8), έχουμε ότι $V = \{V_1, V_2, V_3\}$, όπου $V_1 = \{\{6\},\{7\}\}$, $V_2 = \{\{3,4\},\{5\}\}$ και $V_3 = \{\{1\}\}$, άρα $F_1 = V_3 = \{\{1\}\}$, $F_2 = V_2 = \{\{3,4\},\{5\}\}$ και $F_3 = V_1 = \{\{6\},\{7\}\}$.

Επίσης, εφόσον $Inactive(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X}) \neq \emptyset$, εκτελείται και το σώμα του Βήματος 3 του *FinTO*, άρα $F_4 = \{\{2\},\{8,9\}\}$. Άρα, ανάλογα με την τιμή του $FlagMaxMin$, το σύνολο $F = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ που επιστρέφει ο *FinTO* στο Βήμα 4, ισούται με:

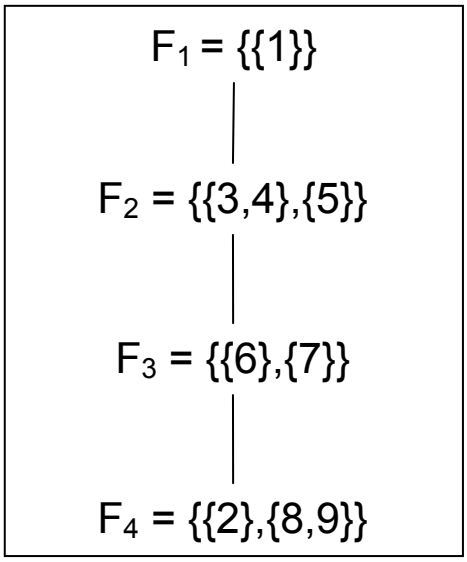
a) $F = \{\{\{1\},\{5\}\},\{\{3,4\},\{6\}\},\{\{7\}\},\{\{2\},\{8,9\}\}\}$, αν $FlagMaxMin$ = 0

b) $F = \{\{\{1\}\},\{\{3,4\},\{5\}\},\{\{6\},\{7\}\},\{\{2\},\{8,9\}\}\}$, αν $FlagMaxMin$ = 1

Οι Εικόνες 3.23 και 3.24 παρουσιάζουν το διάγραμμα Hasse του F μέσω της $\leq_F$ για $FlagMaxMin$ = 0 και $FlagMaxMin$ = 1 αντίστοιχα. Όπως βλέπουμε, και οι δύο ολικές διατάξεις σχετίζονται με *όλα* τα στοιχεία του $X/\approx_X$, αποτελούν μεταβάσεις της μερικής διάταξης $\leq_{X/\approx_X}$ στο $Active(X/\approx_X, \leq_{X/\approx_X})$ και σέβονται την υπόθεσή μας για τη διάταξη μεταξύ ενεργών και μη-ενεργών στοιχείων. □



Εικόνα 3.23 – Το διάγραμμα Hasse του $F = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ μέσω της $\leq_F$ (*FlagMaxMin* =0)



Εικόνα 3.24 - Το διάγραμμα Hasse του $F = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ μέσω της $\leq_F$ (*FlagMaxMin* =1)

Όπως είδαμε από το παραπάνω παράδειγμα, αν και ο αλγόριθμος *FinTO* αντιστοιχεί μια μερική διάταξη μεταξύ των στοιχείων ενός συνόλου σε μια ολική διάταξη συνόλων που περιέχουν τα στοιχεία αυτά, ωστόσο, *δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτούσιος για τη δημιουργία της τελικής αλληλουχίας οθονών αποτελεσμάτων*. Αυτό συμβαίνει γιατί, μέσω του Θεωρήματος 3.1, μια προτίμηση $P = (Y_1 \times \cdots \times Y_n, \leq_P)$ που εμπλέκει τις συναρτήσεις-χαρακτηριστικά $f_1 : X \to Y_1, ..., f_n : X \to Y_n$, αντικατοπτρίζεται σε

μια αντίστοιχη μερική διάταξη *πάνω στο* $X/\approx_X$*, το οποίο αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας του* X *που δημιουργούνται σε σχέση με τις* $f_1,...,f_n$*, και όχι σε μια μερική διάταξη πάνω στο* X *αυτό καθαυτό*. Έτσι, τα σύνολα-στοιχεία του συνόλου F που επιστρέφει ο *FinTO* περιέχουν κλάσεις ισοδυναμίας του $X/\approx_X$ αντί για στοιχεία του X. Ωστόσο, με βάση το γεγονός ότι δεδομένης μιας οποιασδήποτε σχέσης ισοδυναμίας $\approx_Q$ στο X, $\bigcup_{\bar{x}\in X/\approx_Q}\bar{x}=X$, μπορούμε, χωρίς απώλεια πληροφορίας, να δημιουργήσουμε μια τελική αλληλουχία οθονών που περιέχουν τα αντικείμενα του X, η οποία και σχετίζεται με την εκάστοτε δηλωμένη προτίμηση, μέσω του παρακάτω θεωρήματος:

Θεώρημα 3.4: *Έστω προτίμηση* $P=(Y_1\times\cdots\times Y_n,\leq_P)$ *που εμπλέκει τις συναρτήσεις-χαρακτηριστικά* $f_1:X\to Y_1,...,f_n:X\to Y_n$ *των αντικειμένων του* X*. Επίσης, έστω* $\leq_{X/\approx_X}$ *η μερική διάταξη του συνόλου* $X/\approx_X$ *των κλάσεων ισοδυναμίας στο* X *που δημιουργούνται σε σχέση με τις* $f_1,...,f_n$*, η οποία και αντικατοπτρίζει την* P *στο* $X/\approx_X$ *(Θεώρημα 3.1). Αν* $F=\{F_1,...,F_m\}$*, όπου* $m\geq 1$*, το σύνολο που επιστρέφει ο αλγόριθμος FinTO έχοντας ως είσοδο το* $X/\approx_X$*, τότε για το σύνολο* $Monitors=\{O_1,...,O_m\}$*, όπου* $\forall i\in\{1,...,m\}$*,* $O_i=\{x\in\bar{x}\mid\bar{x}\in X/\approx_X$ *και* $\bar{x}\in F_i\}$*, ισχύει ότι:*

a) $\forall j,k\in\{1,...,m\}$ *με* $j\neq k$*,* $O_j\cap O_k=\emptyset$*,*

b) $\bigcup_{l=1}^{m}O_l=X$ *, και*

c) Η δυαδική σχέση $\leq_O$ *πάνω στο* $Monitors$*, τέτοια ώστε* $\forall q,r\in\{1,...,m\}$*,* $O_q\leq_O O_r$ *άνν* $F_q\leq_F F_r$ *, αποτελεί ολική διάταξη του* $Monitors$*, τέτοια ώστε* $O_m\leq_O\cdots\leq_O O_1$*.*□

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε κάθε περίπτωση χωριστά. Συγκεκριμένα:

a) Από την ισχύουσα συνθήκη (β) του αλγόριθμου *FinTO* στην Εικόνα 3.22, προκύπτει ότι $\forall i\in\{1,...,m\}$, $F_i\subset X/\approx_X$. Όμως, όπως ξέρουμε, $\forall\bar{x},\bar{y}\in X/\approx_X$ με $\bar{x}\neq\bar{y}$, ισχύει ότι $\bar{x}\cap\bar{y}=\emptyset$, άρα, μέσω της ισχύουσας συνθήκης (α) του αλγόριθμου *FinTO* στην Εικόνα

3.22, $\forall j,k \in \{1,...,m\}$ με $j \neq k$, έχουμε $\bigcup_{\bar{x}' \in F_j} \bar{x}' \cap \bigcup_{\bar{y}' \in F_k} \bar{y}' = \emptyset$, οπότε, μέσω του ορισμού του $Monitors = \{O_1,...,O_m\}$ στο Θεώρημα 3.4, έχουμε ότι $\forall j,k \in \{1,...,m\}$ με $j \neq k$, $O_j \cap O_k = \emptyset$, οπότε, η πρώτη περίπτωση ισχύει.

b) Από την ισχύουσα συνθήκη (β) του αλγόριθμου *FinTO* στην Εικόνα 3.22, έχουμε ότι $\bigcup_{k=1}^{m} F_k = X / \approx_X$ (1). Όμως, εφόσον από τον ορισμό του $Monitors = \{O_1,...,O_m\}$ ισχύει ότι $\forall i \in \{1,...,m\}$, $O_i = \bigcup_{\bar{x}' \in F_i} \bar{x}'$, τότε, με βάση την (1) και το γεγονός ότι $\forall j,k \in \{1,...,m\}$ με $j \neq k$, $O_j \cap O_k = \emptyset$, προκύπτει ότι $\bigcup_{k=1}^{m} O_k = \bigcup_{\bar{z} \in X/\approx_X} \bar{z} = X$, άρα και η δεύτερη περίπτωση ισχύει.

c) Από την ισχύουσα συνθήκη (γ) του αλγόριθμου *FinTO* στην Εικόνα 3.22, έχουμε ότι η $\leq_F$ είναι ολική διάταξη του $F = \{F_1,...,F_m\}$, τέτοια ώστε $F_m \leq_F \cdots \leq_F F_1$. Άρα, εφόσον $Monitors = \{O_1,...,O_m\}$, τότε, με βάση τον ορισμό της $\leq_O$ στο Θεώρημα 3.4, η $\leq_O$ αποτελεί ολική διάταξη του συνόλου $Monitors$, και, συγκεκριμένα $O_m \leq_O \cdots \leq_O O_1$. Οπότε, και η τρίτη περίπτωση ισχύει. □

Διαισθητικά, το Θεώρημα 3.4 συνδυάζει την ολική διάταξη του F με την ισοδυναμία που χαρακτηρίζει τα στοιχεία του X που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας στο $X / \approx_X$, για τη δημιουργία της τελικής αλληλουχίας οθονών αντικειμένων. Συγκεκριμένα, στοιχεία που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας ή σε διαφορετικές κλάσεις που ανήκουν στο ίδιο σύνολο του F, τοποθετούνται στην ίδια αντίστοιχη οθόνη του συνόλου $Monitors$. Επίσης, η $\leq_O$ που διατάσσει ολικά τις οθόνες του $Monitors$, αποτελεί τη *μετάβαση* της $\leq_F$ στο σύνολο αυτό, οπότε και η τελική αλληλουχία οθονών σχετίζεται άμεσα με την προσέγγιση που παρουσιάσαμε στην ενότητα αυτή. Με βάση, τώρα, τη χρησιμοποίηση του αλγόριθμου *FinTO* (και, εμμέσως, των αλγόριθμων *TOWMax* και *TOWMin*) για τον καθορισμό των περιεχόμενων των οθονών της

τελικής αλληλουχίας, η σημασιολογία της τελικής διάταξης-συσχέτισης των διαθέσιμων αντικειμένων μέσω των οθονών αυτών στηρίζεται σε δύο βασικά σημεία:

a) Κάθε αντικείμενο μιας συγκεκριμένης οθόνης της αλληλουχίας *είναι προτιμότερο κάθε αντικειμένου που περιέχεται* σε οθόνη που βρίσκεται σε χαμηλότερη θέση στην αλληλουχία αυτή. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της τοποθέτησης των μη-ενεργών στοιχείων, τα οποία και αποτελούν τα χειρότερα αποτελέσματα για το χρήστη, στην τελευταία οθόνη της αλληλουχίας και την ολική διάταξη των υπόλοιπων οθονών, οι οποίες και περιέχουν τα ενεργά στοιχεία, μέσω του *TOWMax* ή του *TOWMin*. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η σημασιολογία της ολικής διάταξης των ενεργών στοιχείων διαφέρει ανάλογα με το ποιος από τους δύο παραπάνω αλγόριθμους χρησιμοποιείται, ωστόσο ανταποκρίνεται *επαρκώς* στη μερική διάταξη που αναπαριστά την προτίμηση του χρήστη.
b) Σε κάθε οθόνη της αλληλουχίας, κανένα από τα αντικείμενα που περιέχονται *δεν είναι προτιμότερο* από τα υπόλοιπα, καθότι είτε ανήκουν στην *ίδια* κλάση ισοδυναμίας, είτε οι κλάσεις ισοδυναμίας όπου ανήκουν βρίσκονται στο *ίδιο* σύνολο-στοιχείο της ολικής διάταξης μέσω του *FinTO*. Με βάση το γεγονός αυτό, κάθε οθόνη της αλληλουχίας παρέχει ένα σύνολο από *ισοδύναμες εναλλακτικές* απαντήσεις στο χρήστη, από τις οποίες και μπορεί να επιλέξει όποια αυτός επιθυμεί.

Παράδειγμα 3.10: Έστω το σύνολο $X/\approx_X = \{\{1\},\{2\},\{3,4\},\{5\},\{6\},\{7\},\{8,9\}\}$, καθώς και η μερική διάταξή του $\leq_{X/\approx_X}$ στο Παράδειγμα 3.7, όπου, όπως είδαμε στο παράδειγμα αυτό, η $\leq_{X/\approx_X}$ αποτελεί τον αντικατοπτρισμό της προτίμησης $P_2 = (Y_1 \times Y_2, \leq_{P_2})$ στο $X/\approx_X$ (Θεώρημα 3.1). Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.9, εφαρμόζοντας τον *FinTO* στο $X/\approx_X$, υπάρχουν δύο δυνατές εκδοχές του συνόλου-αποτελέσματος $F = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, ανάλογα με την επιλογή του χρήστη για τη διάταξη των ενεργών στοιχείων του $X/\approx_X$ μέσω του *TOWMax* ή του *TOWMin*. Συγκεκριμένα:

a) Αν $FlagMaxMin$ = 0, τότε $F = \{\{\{1\},\{5\}\},\{\{3,4\},\{6\}\},\{\{7\}\},\{\{2\},\{8,9\}\}\}$, και

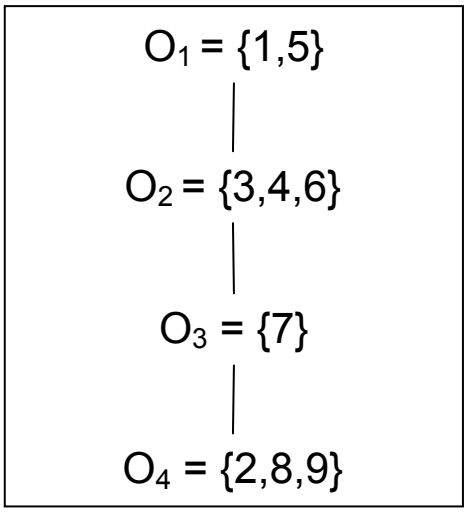
b) Αν $FlagMaxMin$ = 1, τότε $F = \{\{\{1\}\},\{\{3,4\},\{5\}\},\{\{6\},\{7\}\},\{\{2\},\{8,9\}\}\}$.

Οι παραπάνω δύο πιθανές εκδοχές του $F = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ στην έξοδο του *FinTO*, μας οδηγούν, μέσω του Θεωρήματος 3.4, σε, επίσης, δύο δυνατές εκδοχές του $Monitors = \{O_1, O_2, O_3, O_4\}$. Συγκεκριμένα:

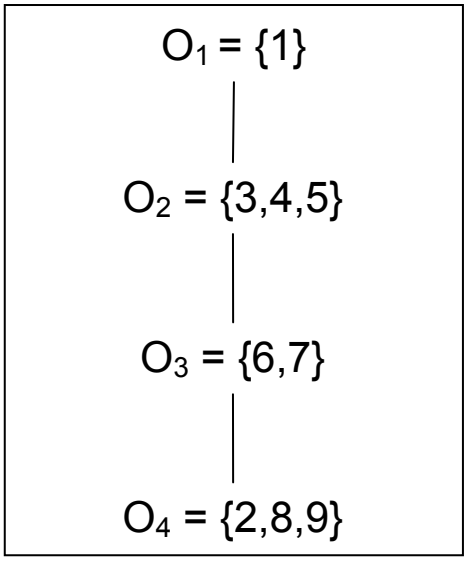
a) Αν $F = \{\{\{1\},\{5\}\},\{\{3,4\},\{6\}\},\{\{7\}\},\{\{2\},\{8,9\}\}\}$ (δηλαδή αν $FlagMaxMin$ = 0), τότε $Monitors = \{\{1,5\},\{3,4,6\},\{7\},\{2,8,9\}\}$, και

b) Αν $F = \{\{\{1\}\},\{\{3,4\},\{5\}\},\{\{6\},\{7\}\},\{\{2\},\{8,9\}\}\}$ (δηλαδή αν $FlagMaxMin$ = 1), τότε $Monitors = \{\{1\},\{3,4,5\},\{6,7\},\{2,8,9\}\}$.

Με βάση το παραπάνω γεγονός, καταλήγουμε σε *δύο τελικές αλληλουχίες οθονών αποτελεσμάτων που σχετίζονται με την* $P_2 = (Y_1 \times Y_2, \leq_{P_2})$ του Παραδείγματος 3.7*,* οι οποίες, όμως, *έχουν το ίδιο πλήθος οθονών*. Οι Εικόνες 3.25 και 3.26 παρουσιάζουν το διάγραμμα Hasse του $Monitors = \{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ μέσω της $\leq_O$, στην περίπτωση που στην είσοδο του *FinTO* έχουμε $FlagMaxMin$ = 0 και $FlagMaxMin$ = 1 αντίστοιχα. Απ' ότι παρατηρούμε και στις δύο εικόνες, η διάταξη των αντικειμένων του $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, μέσω των οθονών στις οποίες ανήκουν, είναι πλέον ξεκάθαρη. □



Εικόνα 3.25 - Το διάγραμμα Hasse του $Monitors = \{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ μέσω της $\leq_O$ (*FlagMaxMin* =0)



Εικόνα 3.26 - Το διάγραμμα Hasse του $Monitors = \{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ **μέσω της** $\leq_O$ **(*FlagMaxMin* =1)**

3.2.3 Κατασκευή της Διάταξης που χαρακτηρίζει την Δηλωμένη Προτίμηση του Χρήστη

Όπως είδαμε προηγουμένως, μέσω του Ορισμού 3.8 προσδιορίσαμε την έννοια της προτίμησης στο συναρτησιακό πλαίσιο ως μια *μερική διάταξη του καρτεσιανού γινομένου των συνόλων άφιξης των συναρτήσεων-χαρακτηριστικών που εμπλέκονται σ' αυτή*. Επίσης, στηριζόμενοι στον παραπάνω ορισμό, στην Ενότητα 3.2.2 αναλύσαμε την τυπική διαδικασία της διάταξης των διαθέσιμων αντικειμένων, καθώς και τη δημιουργία της αντίστοιχης ολικής διάταξης οθονών αποτελεσμάτων, με βάση μια δηλωμένη προτίμηση. Ολοκληρώνοντας την προσέγγισή μας πάνω στις προτιμήσεις και τις διατάξεις που αυτές επιφέρουν, στην ενότητα αυτή παραθέτουμε τις *μεθόδους κατασκευής της μερικής διάταξης που χαρακτηρίζει μια προτίμηση του δικού μας θεωρητικού πλαισίου*.

Διαισθητικά, μια προτίμηση του πλαισίου μας, η οποία και εμπλέκει ένα σύνολο από συναρτήσεις που χαρακτηρίζουν τα διαθέσιμα αντικείμενα, μπορεί να εκφραστεί από τον εκάστοτε χρήστη με δύο πιθανούς τρόπους:

a) Ο *άμεσος (explicit)* τρόπος: Ο χρήστης δηλώνει την επιθυμία του *κατευθείαν* πάνω στις τιμές του *καρτεσιανού γινομένου των*

συνόλων άφιξης των εμπλεκόμενων συναρτήσεων-χαρακτηριστικών, και

b) Ο *έμμεσος (implicit)* τρόπος: Ο χρήστης δηλώνει την επιθυμία του στις τιμές του συνόλου άφιξης κάθε εμπλεκόμενης συνάρτησης-χαρακτηριστικού *χωριστά*, καθώς επίσης και *μεταξύ των συναρτήσεων αυτών*.

Απ' ότι βλέπουμε, ο πρώτος τρόπος, σε αντίθεση με τον δεύτερο, οδηγεί σε *άμεση κατασκευή της μερικής διάταξης που αναπαριστά τη δηλωμένη προτίμηση*, εφόσον οι επιθυμίες του χρήστη σχετίζονται *απευθείας* με το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων άφιξης των εμπλεκόμενων συναρτήσεων-χαρακτηριστικών. Όμως, από την άλλη μεριά, ο δεύτερος τρόπος προσεγγίζει *πληρέστερα* τα παραδείγματα προτιμήσεων στην καθημερινή ζωή. Π.χ., ένας άνθρωπος που θέλει να αγοράσει ένα αυτοκίνητο, συνήθως εκφράζει την προτίμησή του σε κάθε χαρακτηριστικό *χωριστά* (π.χ., ποιές μάρκες αυτοκινήτων επιθυμεί, πόσα λεφτά περίπου πρέπει να κάνει, αν θέλει να παίρνει αμόλυβδη βενζίνη ή όχι, ποιές χρονιές έκδοσης τον ενδιαφέρον πιο πολύ, κτλ.) και μεταξύ των χαρακτηριστικών αυτών, ποια θεωρεί ως πιο σημαντικά και ποια λιγότερο σημαντικά έως αδιάφορα (π.χ., να θεωρεί την τιμή του αυτοκινήτου ως τον πιο σημαντικό παράγοντα, τη μάρκα του αυτοκινήτου και τη χρονιά έκδοσης ως εξίσου σημαντικά, να αδιαφορεί για την προτίμησή του πάνω στη δυνατότητα χρήσης αμόλυβδης βενζίνης σε σχέση με τα άλλα χαρακτηριστικά, κτλ.). Με βάση το γεγονός αυτό, σε περίπτωση που ακολουθείται ο δεύτερος τρόπος από το χρήστη, είναι απαραίτητη η θεμελίωση μιας τυπικής διαδικασίας για την κατασκευή της μερικής διάταξης που αναπαριστά μια δηλωμένη προτίμηση, *συνδυάζοντας τις προτιμήσεις που ο χρήστης εκφράζει στο σύνολο άφιξης κάθε συνάρτησης-χαρακτηριστικού με την προτίμησή του μεταξύ των χαρακτηριστικών αυτών*. Μεταφράζοντας το πρόβλημα αυτό στο δικό μας πλαίσιο, δεδομένης μιας προτίμησης $P = (Y_1 \times \cdots \times Y_n, \leq_P)$ που εμπλέκει τις συναρτήσεις-χαρακτηριστικά $f_1 : X \to Y_1, ..., f_n : X \to Y_n$, επιζητούμε την κατασκευή της $\leq_P$ (η οποία και αναπαριστά την P στο $Y_1 \times \cdots \times Y_n$), μέσω:

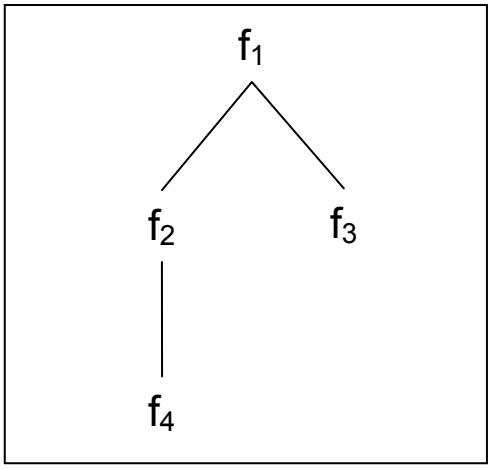
a) *Των προτιμήσεων του χρήστη πάνω στις τιμές καθενός από τα σύνολα* $Y_1, ..., Y_n$. Οι προτιμήσεις αυτές ονομάζονται *ατομικές*

προτιμήσεις της P, και $\forall i \in \{1,...,n\}$ η ατομική προτίμηση που αντιστοιχεί στο σύνολο Y_i συμβολίζεται ως $P^{Y_i} = (Y_i, \leq_{P^{Y_i}})$, όπου $\leq_{P^{Y_i}}$ η μερική διάταξη που την αναπαριστά στο σύνολο αυτό.

b) *Της προτίμησης του χρήστη μεταξύ των εμπλεκόμενων συναρτήσεων* $f_1,...,f_n$. Η προτίμηση αυτή ονομάζεται *προτίμηση εμπλεκόμενων συναρτήσεων της* P, και συμβολίζεται ως $P^S = (S, \leq_{P^S})$, όπου $S = \{f_1,...,f_n\}$ και $\leq_{P^S}$ η μερική διάταξη που την αναπαριστά στο S.

Η πρώτη μας ενέργεια για την κατασκευή της $\leq_P$ στο $Y_1 \times \cdots \times Y_n$ είναι ο καθορισμός μιας *ολικής διάταξης των συναρτήσεων-χαρακτηριστικών του* S. Εφόσον το S αποτελεί το σύνολο των εμπλεκόμενων συναρτήσεων-χαρακτηριστικών της P, τότε μπορούμε, ευλόγως, να θεωρήσουμε ότι είναι μη-κενό και πεπερασμένο, καθότι *κάθε προτίμηση σχετίζεται με ένα συγκεκριμένο αριθμό χαρακτηριστικών*. Άρα, εφόσον, όπως είδαμε παραπάνω, το S είναι και μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_{P^S}$, η επίτευξη της παραπάνω ολικής διάταξης *μπορεί να γίνει με την εφαρμογή του αλγόριθμου FinTO της Εικόνας 3.22 στο* S. Για να γίνει αυτό πιο κατανοητό, ακολουθεί ένα ενδεικτικό παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.11: Έστω η προτίμηση $P_3 = (Y_1 \times \cdots \times Y_4, \leq_{P_3})$ που εμπλέκει τις συναρτήσεις-χαρακτηριστικά $f_1 : X \to Y_1,..., f_4 : X \to Y_4$ των αντικειμένων του X, καθώς και $P_3^S = (S, \leq_{P_3^S})$, όπου $S = \{f_1,...,f_4\}$, η προτίμηση εμπλεκόμενων συναρτήσεων της P_3, όπου $f_3 \leq_{P_3^S} f_1$, $f_2 \leq_{P_3^S} f_1$ και $f_4 \leq_{P_3^S} f_2$ (εφόσον η $\leq_{P_3^S}$ είναι μεταβατική στο S, ως μερική διάταξή του, ισχύει κι ότι $f_4 \leq_{P_3^S} f_1$). Η Εικόνα 3.27 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του S μέσω της $\leq_{P_3^S}$.



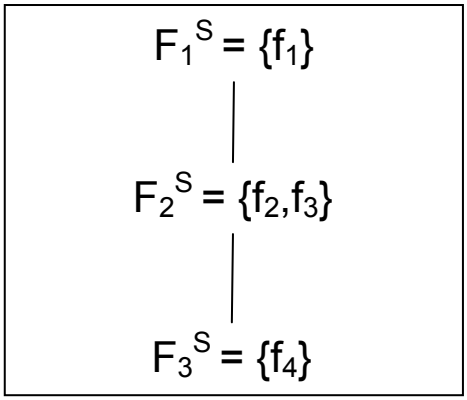
Εικόνα 3.27 - Το διάγραμμα Hasse του $S = \{f_1,...,f_4\}$ μέσω της $\leq_{P_3^S}$

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, υπάρχουν *δύο πιθανές εκδοχές* του συνόλου-αποτελέσματος του αλγόριθμου *FinTO*, ανάλογα με το ποιος από τους αλγόριθμους *TOWMin* και *TOWMax* επιλέγεται για την ολική διάταξη των ενεργών στοιχείων του μερικώς διατεταγμένου συνόλου που λαμβάνει ως είσοδο. Συγκεκριμένα, για το $S = \{f_1,...,f_4\}$ έχουμε τις δύο παρακάτω πιθανές εκδοχές για το σύνολο-αποτέλεσμα $F^S = \{F_1^S, F_2^S, F_3^S\}$ του *FinTO*, το οποίο, με βάση την ισχύουσα συνθήκη (γ) του *FinTO*, είναι ολικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_F$ (συγκεκριμένα $F_3^S \leq_F F_2^S \leq_F F_1^S$):

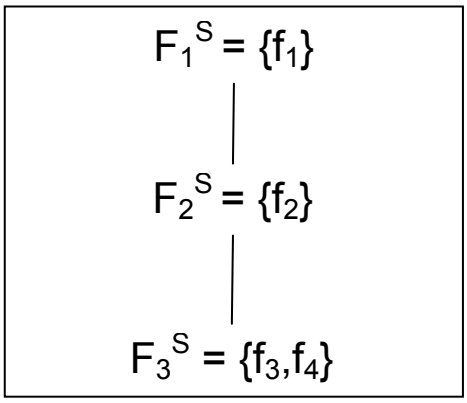
a) $F^S = \{\{f_1\},\{f_2,f_3\},\{f_4\}\}$, όπου $\{f_4\} \leq_F \{f_2,f_3\} \leq_F \{f_1\}$, στην περίπτωση που επιλέχτηκε ο αλγόριθμος *TOWMax*

b) $F^S = \{\{f_1\},\{f_2\},\{f_3,f_4\}\}$, όπου $\{f_3,f_4\} \leq_F \{f_2\} \leq_F \{f_1\}$, στην περίπτωση που επιλέχτηκε ο αλγόριθμος *TOWMin*

Οι Εικόνες 3.28 και 3.29 παρουσιάζουν το διάγραμμα Hasse των δύο εκδοχών του $F^S = \{F_1^S, F_2^S, F_3^S\}$ μέσω της $\leq_F$, όπου και φαίνεται ξεκάθαρα η ολική διάταξή τους. □



Εικόνα 3.28 - Το διάγραμμα Hasse του $F^S = \{\{f_1\},\{f_2,f_3\},\{f_4\}\}$ μέσω της $\leq_F$ (περίπτωση επιλογής *TOWMax*)



Εικόνα 3.29 - Το διάγραμμα Hasse του $F^S = \{\{f_1\},\{f_2\},\{f_3,f_4\}\}$ μέσω της $\leq_F$ (περίπτωση επιλογής *TOWMin*)

Παραπάνω είδαμε, μέσω του αλγόριθμου *FinTO*, πώς μπορούμε να καθορίσουμε μια ολική διάταξη που σχετίζεται με τις συναρτήσεις-χαρακτηριστικά που εμπλέκονται στην προτίμηση P σε σχέση με την P^S. Ωστόσο, η ολική διάταξη αυτή *δεν συσχετίζει στοιχεία του S, αλλά υποσύνολα του S*. Με βάση, λοιπόν, το γεγονός αυτό, μπορούμε να κάνουμε δύο εύλογες θεωρήσεις για τη σχέση των συναρτήσεων-χαρακτηριστικών με βάση την P:

a) *Δύο συναρτήσεις-χαρακτηριστικά που ανήκουν στο ίδιο σύνολο-στοιχείο του F^S, όπου F^S το αποτέλεσμα του αλγόριθμου FinTO με είσοδο το S, είναι ισοδύναμες για την P, και*
b) *Συναρτήσεις-χαρακτηριστικά που ανήκουν σε ένα σύνολο-στοιχείο A του F^S, θεωρούνται πιο σημαντικές από άλλες που ανήκουν στο σύνολο-στοιχείο B του F^S για την P, όταν το B υπολείπεται του A μέσω της $\leq_F$ (δηλαδή $B \leq_F A$).*

Π.χ., στο Παράδειγμα 3.11, αν $F^S = \{F_1^S, F_2^S, F_3^S\} = \{\{f_1\}, \{f_2, f_3\}, \{f_4\}\}$, όπου $\{f_4\} \leq_F \{f_2, f_3\} \leq_F \{f_1\}$, για την προτίμηση P_3 έχουμε ότι οι f_2 και f_3 είναι ισοδύναμες και πιο σημαντικές από την f_4, καθώς και η f_1 είναι πιο σημαντική από τις f_2, f_3, f_4. Αναλόγως, αν $F^S = \{F_1^S, F_2^S, F_3^S\} = \{\{f_1\}, \{f_2\}, \{f_3, f_4\}\}$, όπου $\{f_3, f_4\} \leq_F \{f_2\} \leq_F \{f_1\}$, για την P_3 έχουμε ότι οι f_3 και f_4 είναι ισοδύναμες, η f_2 είναι πιο σημαντική από τις f_3, f_4, καθώς και η f_1 είναι πιο σημαντική από τις f_2, f_3, f_4.

Έχοντας, τώρα, την συνολική εποπτεία για τη σχέση των εμπλεκόμενων συναρτήσεων της P μέσω της P^S, η κατασκευή της μερικής διάταξης $\leq_P$ με βάση τις ατομικές προτιμήσεις $P^{Y_1} = (Y_1, \leq_{P^{Y_1}}), ..., P^{Y_n} = (Y_n, \leq_{P^{Y_n}})$ της P, μπορεί να γίνει ακολουθώντας τα παρακάτω δύο βήματα:

1. Για κάθε στοιχείο-σύνολο του F^S κατασκευάζουμε τη διάταξη μέσω συντεταγμένων (Ορισμός 2.10) των αντίστοιχων συνόλων άφιξης των συναρτήσεων-χαρακτηριστικών που περιέχονται στο σύνολο αυτό, τα οποία και είναι μερικώς διατεταγμένα ως προς τις ανάλογες ατομικές προτιμήσεις της P. Με τον τρόπο αυτό, διατηρείται η διαισθητική ισοδυναμία μεταξύ των συναρτήσεων αυτών, εφόσον, σημασιολογικά, η διάταξη μέσω συντεταγμένων *δεν θεωρεί καμία συνιστώσα μερική διάταξη σημαντικότερη από τις υπόλοιπες*.
2. Έπειτα, έχοντας κατασκευάσει την διάταξη μέσω συντεταγμένων για κάθε στοιχείο-σύνολο του F^S, η $\leq_P$ αποτελεί τη λεξικογραφική διάταξη (Ορισμός 2.11) των διατάξεων αυτών, κρατώντας τη σειρά διάταξης των αντίστοιχων στοιχείων-συνόλων του F^S μέσω της $\leq_F$. Με τον τρόπο αυτό, διατηρείται και η ιεραρχία των συναρτήσεων-χαρακτηριστικών με βάση την $\leq_F$.

Εφόσον, όμως, για το $F^S = \{F_1^S, ..., F_m^S\}$ ισχύει ότι $F_m^S \leq_F \cdots \leq_F F_1^S$ (συνθήκη (γ) του *FinTO*), όλη η παραπάνω μεθοδολογία για την κατασκευή της $\leq_P$ που αναπαριστά την P στο $Y_1 \times \cdots \times Y_n$, μπορεί να συνοψιστεί στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 3.13: *Έστω προτίμηση* $P=(Y_1\times\cdots\times Y_n,\leq_P)$ *που εμπλέκει τις συναρτήσεις-χαρακτηριστικά* $f_1:X\to Y_1,...,f_n:X\to Y_n$ *των αντικειμένων του* X, $P^S=(S,\leq_{P^S})$, *όπου* $S=\{f_1,...,f_n\}$, *η προτίμηση εμπλεκόμενων συναρτήσεων της* P, $P^{Y_1}=(Y_1,\leq_{P^{Y_1}}),...,P^{Y_n}=(Y_n,\leq_{P^{Y_n}})$ *οι ατομικές προτιμήσεις της* P *και* $F^S=\{F_1^S,...,F_m^S\}$, *όπου* $m\geq 1$, *το σύνολο-αποτέλεσμα του αλγόριθμου FinTO (Εικόνα 3.22) με είσοδο το* S. *Τότε, αν* $\otimes$ *και* $\succ$ *οι τελεστές της διάταξης μέσω συντεταγμένων και της λεξικογραφικής διάταξης αντίστοιχα, η* $\leq_P$ *αποτελεί την μερική διάταξη του συνόλου* $CO_1\succ\cdots\succ CO_m=Y_1\times\cdots\times Y_n$, *όπου* $\forall i\in\{1,...,m\}$, $CO_i=\underset{f_j\in F_i^S}{\otimes}Y_j$ *και* $j\in\{1,...,n\}$.□

Παράδειγμα 3.12: Έστω ξανά η προτίμηση $P_3=(Y_1\times\cdots\times Y_4,\leq_{P_3})$ του Παραδείγματος 3.11 και έστω, τώρα, ότι $Y_1=\{a,b\}$, $Y_2=\{c,d\}$, $Y_3=\{e,f\}$, $Y_4=\{g,h\}$, καθώς και $P_3^{Y_1}=(Y_1,\leq_{P_3^{Y_1}})$, $P_3^{Y_2}=(Y_2,\leq_{P_3^{Y_2}})$, $P_3^{Y_3}=(Y_3,\leq_{P_3^{Y_3}})$, $P_3^{Y_4}=(Y_4,\leq_{P_3^{Y_4}})$ οι ατομικές προτιμήσεις της P_3, όπου $b\leq_{P_3^{Y_1}}a$, $d\leq_{P_3^{Y_2}}c$, $f\leq_{P_3^{Y_3}}e$ και $h\leq_{P_3^{Y_4}}g$ αντίστοιχα. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.11, υπάρχουν δύο πιθανές εκδοχές του συνόλου-αποτελέσματος $F^S=\{F_1^S,F_2^S,F_3^S\}$ του αλγόριθμου *FinTO* με βάση την προτίμηση $P_3^S=(S,\leq_{P_3^S})$, όπου $S=\{f_1,...,f_4\}$:

a) $F^S=\{\{f_1\},\{f_2,f_3\},\{f_4\}\}$, στην περίπτωση επιλογής του αλγόριθμου *TOWMax* για τη διάταξη των ενεργών στοιχείων του S με βάση την $\leq_{P_3^S}$.

b) $F^S=\{\{f_1\},\{f_2\},\{f_3,f_4\}\}$, στην περίπτωση επιλογής του αλγόριθμου *TOWMin* για τη διάταξη των ενεργών στοιχείων του S με βάση την $\leq_{P_3^S}$.

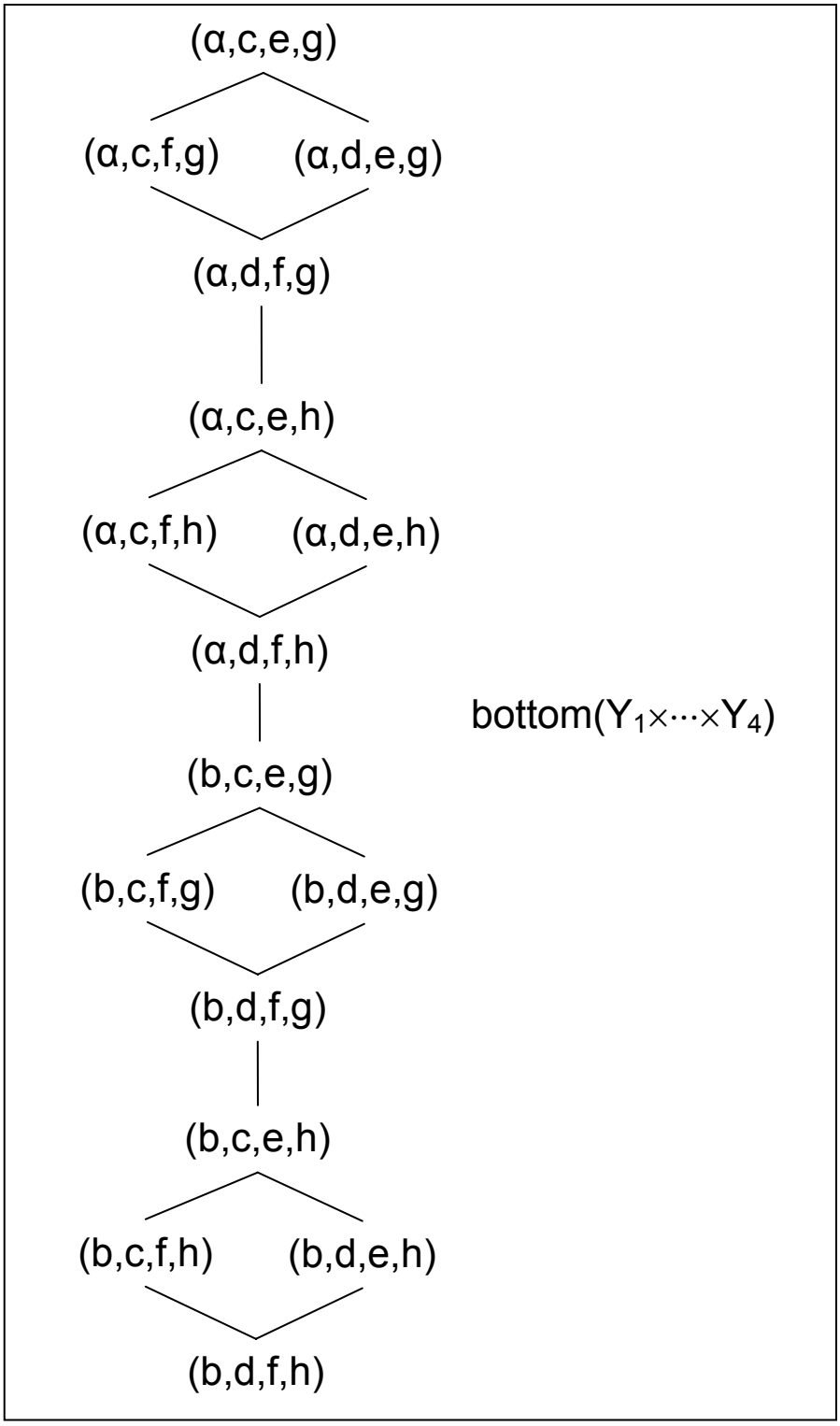
Μέσω του παραπάνω γεγονότος και του Ορισμού 3.13, έχουμε και δύο πιθανές εκδοχές της μερικής διάταξης $\leq_{P_3}$ πάνω στο $Y_1\times\cdots\times Y_4$. Συγκεκριμένα, δεδομένου ότι $\forall l\in\{1,...,n\}$, το σύνολο άφιξης Y_i της

συνάρτησης-χαρακτηριστικού f_i είναι μερικώς διατεταγμένο ως προς $\leq_{P_3^{Y_i}}$, έχουμε:

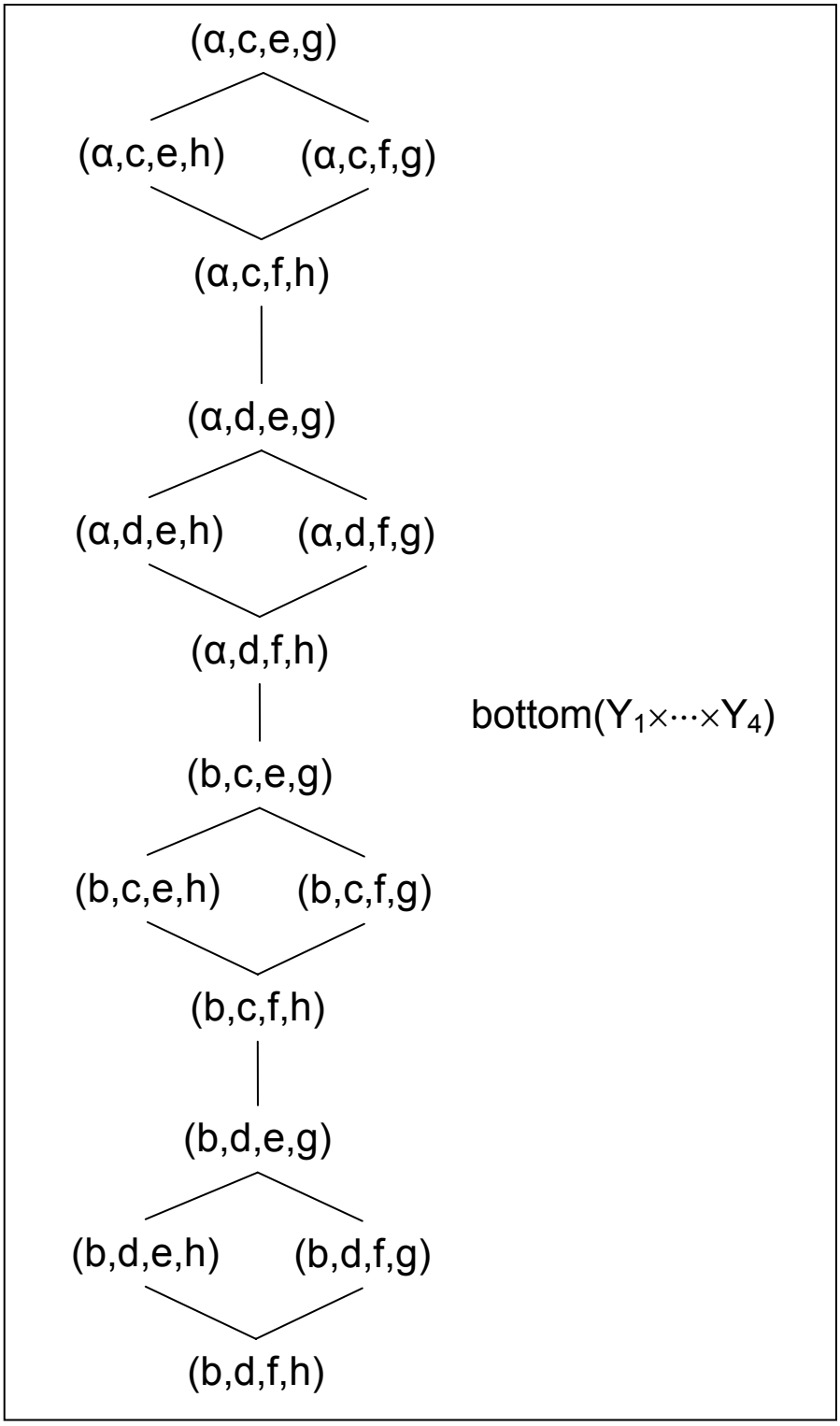
a) Αν $F^S = \{\{f_1\},\{f_2,f_3\},\{f_4\}\}$, τότε η $\leq_{P_3}$ αποτελεί τη μερική διάταξη του $CO_1 \succ CO_2 \succ CO_3 = Y_1 \succ (Y_2 \otimes Y_3) \succ Y_4$, και

b) Αν $F^S = \{\{f_1\},\{f_2\},\{f_3,f_4\}\}$, τότε η $\leq_{P_3}$ αποτελεί τη μερική διάταξη του $CO_1 \succ CO_2 \succ CO_3 = Y_1 \succ Y_2 \succ (Y_3 \otimes Y_4)$.

Οι Εικόνες 3.30 και 3.31 παρουσιάζουν το διάγραμμα Hasse του $Y_1 \times \cdots \times Y_4$ (συμπεριλαμβανομένου και του $bottom(Y_1 \times \cdots \times Y_4)$) μέσω της $\leq_{P_3}$, με βάση τις δύο παραπάνω εκδοχές του $F^S = \{F_1^S, F_2^S, F_3^S\}$, *όπου και στις δύο το* $bottom(Y_1 \times \cdots \times Y_4)$ *είναι μη-διατασσόμενο σε σχέση με τα υπόλοιπα στοιχεία του* $Y_1 \times \cdots \times Y_4$ (Πρόταση 3.1). Εδώ, αξίζει να σημειώσουμε ότι στην κατασκευή αυτή *δεν συμπεριλήφθηκαν τα στοιχεία-πυθμένες των* $Y_1,...,Y_4$, εφόσον, μέσω του Ορισμού 3.5 και της Πρότασης 3.1, *σχετίζονται μόνο με το* $bottom(Y_1 \times \cdots \times Y_4)$ *και δεν διατάσσονται σε σχέση με τις αντίστοιχες ατομικές προτιμήσεις της* P. □



Εικόνα 3.30 - Το διάγραμμα Hasse του $Y_1 \times \cdots \times Y_4$ μέσω της $\leq_{P_3}$ (για $F^S = \{\{f_1\},\{f_2,f_3\},\{f_4\}\}$)



Εικόνα 3.31 - Το διάγραμμα Hasse του $Y_1 \times \cdots \times Y_4$ μέσω της $\leq_{P_3}$ (για $F^S = \{\{f_1\},\{f_2\},\{f_3,f_4\}\}$)

3.3 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό είδαμε σε πλήρη εφαρμογή τις έννοιες που εισαγάγαμε στο Κεφάλαιο 2 για τη θεμελίωση και αναπαράσταση των προτιμήσεων ως *μερικές διατάξεις* στο συναρτησιακό περιβάλλον. Το πιο σημαντικό γεγονός πάνω στη θεμελίωση αυτή είναι η *ανεξαρτησία* των προτιμήσεων σε σχέση με το εκάστοτε σύνολο των διαθέσιμων αντικειμένων, το οποίο και προσδίδει ευελιξία για πιο γενικευμένους προσδιορισμούς τους. Επίσης, με βάση τον ορισμό της προτίμησης στο συναρτησιακό πλαίσιο και στηριζόμενοι στις έννοιες της σχέσης ισοδυναμίας και του ομοιομορφισμού μερικών διατάξεων από το Κεφάλαιο 2, παρουσιάσαμε μια συγκεκριμένη μεθοδολογία για την τελική διάταξη των εκάστοτε διαθέσιμων αντικειμένων, καθώς και αναπτύξαμε έναν συγκεκριμένο τρόπο κατασκευής της μερικής διάταξης που αναπαριστά μια προτίμηση σε ένα συγκεκριμένο σύνολο τιμών.

Με βάση τα παραπάνω, θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι η θεωρητική μας προσέγγιση αποτελεί ένα ικανοποιητικό πλαίσιο για την έννοια και τη διαχείριση των προτιμήσεων σε ένα τόσο γενικό μοντέλο δεδομένων όπως είναι το συναρτησιακό, για τους παρακάτω λόγους:

1) Η ανεξαρτησία του ορισμού των προτιμήσεων σε σχέση με τα εκάστοτε διαθέσιμα αντικείμενα, καλύπτει και τις αρκετά συνήθεις καταστάσεις όπου τα διαθέσιμα αντικείμενα *δεν είναι γνωστά*,
2) Η μεθοδολογία για την τελική διάταξη των διαθέσιμων αντικειμένων μέσω ορισμένων προτιμήσεων είναι *γενική* και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε προτίμηση του πλαισίου μας,
3) Δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην ίδια τη διάταξη των συναρτήσεων-χαρακτηριστικών, το οποίο προσιδιάζει σε εφαρμογές όπου το σχήμα περιγραφής των αντικειμένων καθορίζει τη σημασία τους, όπως αυτές του Σημασιολογικού Ιστού.

Κεφάλαιο 4

Επισκόπηση Σχετικών Προσεγγίσεων

Στο κεφάλαιο αυτό, αναλύουμε τις σχετικές προσεγγίσεις για την αναπαράσταση προτιμήσεων και την αντίστοιχη διάταξη των διαθέσιμων αντικειμένων, για τις οποίες αναφερθήκαμε στην εισαγωγή. Λόγω της μεγαλύτερης εκφραστικής δυνατότητας των ποιοτικών προσεγγίσεων σε σχέση με τις ποσοτικές, και σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το δικό μας πλαίσιο αποτελεί μια ποιοτική προσέγγιση προτιμήσεων σε συναρτησιακές αναπαραστάσεις, η επισκόπηση αυτή στηρίζεται στις πιο σημαντικές και εκφραστικά πλουσιότερες ερευνητικές δουλειές της κατηγορίας αυτής, επισημαίνοντας τα κυριότερα χαρακτηριστικά τους μέσω ενός κοινού παραδείγματος.

4.1 Ποιοτικές Προσεγγίσεις

Στην κατηγορία αυτή, οι πιο σημαντικές προσεγγίσεις είναι τα πλαίσια του Chomicki [7], [8] και του Kießling [19]. Για να εξετάσουμε διεξοδικά τα είδη προτιμήσεων που ορίζουν, παραθέτουμε ως κοινό παράδειγμα εξέτασης το στιγμιότυπο ενός σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* με $dom(Name) = N$ (όπου N το μη-πεπερασμένο σύνολο όλων των αλφαριθμητικών), $dom(Category) = C = \{$*"RPG", "Adventure", "Action-Adventure", "Manager", "Strategy", "Beat-em-up", "Simulation"*$\}$, $dom(Year) = Y$ (όπου Y το μη-πεπερασμένο σύνολο όλων των θετικών ακεραίων) και $dom(Price\text{-}in\text{-}Euro) = P$ (όπου P το μη-πεπερασμένο σύνολο όλων των θετικών δεκαδικών με δύο δεκαδικά ψηφία), το οποίο και παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.1:

Name	Category	Year	Price-in-Euro
MonkeyIsland4	Adventure	2002	20.95
FlightSim3	Simulation	2000	21.50
CM2004	Manager	2004	25.30
GK3	Adventure	1998	17.70
AgeOfEmpires2	Strategy	2003	30.00
Indy	Action-Adventure	2000	16.55
TheSims2	Strategy	2004	39.00
TotalClubManager	Manager	2003	20.95
RiseOfNations	Strategy	2000	21.50

Εικόνα 4.1 - Το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PCGames*

Ο βασικός λόγος για τον οποίο χρησιμοποιήσαμε το σχεσιακό μοντέλο, έγκειται στο γεγονός ότι οι σχεσιακές βάσεις δεδομένων αποτελούν κοινό πεδίο για τη θεμελίωση και διαχείριση των προτιμήσεων από τους Chomicki και Kießling.

4.1.1 Πλαίσιο Προτιμήσεων κατά Chomicki

Ο Chomicki [7], [8] θεμελιώνει τον ορισμό προτιμήσεων του χρήστη πάνω στο σχεσιακό μοντέλο δεδομένων ως *φόρμουλες λογικής πρώτης τάξης (first order logic formulas)*, οι οποίες και ονομάζονται *φόρμουλες προτίμησης (preference formulas)*. Στο πλαίσιο αυτό, οι προτιμήσεις του χρήστη διαχωρίζονται σε δύο κατηγορίες με βάση την δομή στην οποία δηλώνονται:

1. *Ενδογενείς (Intrinsic) προτιμήσεις:* Οι προτιμήσεις αυτές εμπλέκουν *ενσωματωμένα κατηγορήματα (built-in predicates)* πάνω στις τιμές των γνωρισμάτων που περιέχονται στις πλειάδες ενός σχεσιακού πίνακα.
2. *Εξωγενείς (Extrinsic) προτιμήσεις:* Οι προτιμήσεις αυτές εμπλέκουν, εκτός από ενσωματωμένα κατηγορήματα, και άλλες κατασκευές του μοντέλου, όπως είναι οι ίδιοι σχεσιακοί πίνακες της βάσης δεδομένων ή η συμμετοχή (membership) των πλειάδων στους σχεσιακούς πίνακες. Π.χ., ένας χρήστης που δηλώνει ότι προτιμά

τις πλειάδες ενός σχεσιακού πίνακα σε σχέση με τις πλειάδες ενός άλλου σχεσιακού πίνακα, εκφράζει μια εξωγενή προτίμηση.

Από τις δύο αυτές κατηγορίες προτιμήσεων, ο Chomicki ασχολείται ως επί το πλείστον με τις ενδογενείς προτιμήσεις, εφόσον ο καθορισμός της σχέσης προτίμησης μεταξύ δύο πλειάδων ενός σχεσιακού πίνακα με βάση τις τιμές που περιέχονται στις πλειάδες αυτές, γίνεται άμεσα με την αναπαράσταση των προτιμήσεων αυτών ως φόρμουλες προτίμησης (οι οποίες σ' αυτή την περίπτωση ονομάζονται *ενδογενείς φόρμουλες προτίμησης (intrinsic preference formulas)*). Από την άλλη πλευρά, οι εξωγενείς προτιμήσεις σχετίζονται και με άλλες κατασκευές, όπως είναι το σύνολο των σχεσιακών πινάκων της βάσης κ.ά., οπότε και χρησιμοποιούν κριτήρια διάταξης που, τις περισσότερες φορές, *δεν* μπορούν να εκφραστούν με τη χρήση φόρμουλων προτίμησης. Ωστόσο, σε ένα μέρος από αυτές, μπορούν να χρησιμοποιηθούν φόρμουλες προτίμησης υπό προϋποθέσεις, οι οποίες φόρμουλες, όμως, *δεν είναι* ενδογενείς.

Από πρακτική σκοπιά, οι φόρμουλες προτίμησης, ενδογενείς και μη, δηλώνουν αντίστοιχες *δυαδικές σχέσεις προτίμησης* πάνω στο σχεσιακό πίνακα που εφαρμόζονται, μέσω του παρακάτω ορισμού:

Ορισμός 4.1: *Έστω ένας σχεσιακός πίνακας* $R(A_1,...,A_n)$. *Μια φόρμουλα προτίμησης* $C(t_i,t_j)$ *πάνω στον* R, *όπου* $t_i,t_j \in dom(A_1)\times\cdots\times dom(A_n)$, *είναι μια φόρμουλα λογικής πρώτης τάξης, η οποία ορίζει μια αντίστοιχη σχέση προτίμησης* $\succ_C \subseteq (dom(A_1)\times\cdots\times dom(A_n))\times(dom(A_1)\times\cdots\times dom(A_n))$ *στον* R *ως εξής:*

$$t_i \succ_C t_j, \text{ άνν } C(t_i,t_j),$$

όπου $t_i \succ_C t_j$ *σημαίνει ότι η πλειάδα* t_i *προηγείται της* t_j *στην* $\succ_C$.

Αν η $C(t_i,t_j)$ *χρησιμοποιεί μόνο ενσωματωμένα κατηγορήματα, τότε ονομάζεται ενδογενής φόρμουλα προτίμησης.* □

Απ' ότι παρατηρούμε, μια ορισμένη σχέση προτίμησης στο πλαίσιο του Chomicki εφαρμόζεται απευθείας *πάνω στις πλειάδες που περιέχει το στιγμιότυπο του πίνακα εκείνη τη στιγμή*, παρουσιάζοντας έναν διαφορετικό

ορισμό προτίμησης σε σχέση με το δικό μας θεωρητικό πλαίσιο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η σχέση προτίμησης του Chomicki ορίζεται πάνω σε ένα *συγκεκριμένο σχεσιακό πίνακα*, οπότε και εφαρμόζεται άμεσα σε *όλη την πληροφορία* που χαρακτηρίζει τα «αντικείμενα» προς διάταξη (δηλαδή, τις πλειάδες των εκάστοτε στιγμιότυπων του πίνακα αυτού). Από την άλλη μεριά, στο δικό μας πλαίσιο οι προτιμήσεις ορίζονται σε σύνολα τιμών, τα οποία *δεν περιέχουν πάντα* όλη την πληροφορία που χαρακτηρίζει τα αντικείμενα που θέλουμε να διατάξουμε, οπότε και χρειαζόμαστε ένα μεταβατικό στάδιο για την αντιστοίχηση της διάταξης της πληροφορίας που σχετίζεται με την εκάστοτε προτίμηση στη διάταξη του συνόλου των αντικειμένων.

Μια σχέση προτίμησης $\succ_C$ ορισμένη πάνω σε ένα σχεσιακό πίνακα R, δημιουργεί μια αντίστοιχη *σχέση αδιαφορίας (indifference relation)* στον R, ως εξής:

Ορισμός 4.2: *Έστω σχεσιακός πίνακας* $R(A_1,...,A_n)$ *και* $\succ_C$ *μια σχέση προτίμησης στον* R. *Τότε η δυαδική σχέση* $\cong_C$, *για την οποία* $\forall t_i,t_j \in dom(A_1)\times\cdots\times dom(A_n)$, $t_i \cong_C t_j$ *άνν* $t_i \not\succ_C t_j$ *και* $t_j \not\succ_C t_i$, *είναι η αντίστοιχη σχέση αδιαφορίας της* $\succ_C$ *στον* R .

Δύο πλειάδες του R *που συσχετίζονται μέσω της* $\cong_C$ *ονομάζονται αδιάφορες ως προς την* $\succ_C$. □

Διαισθητικά, με τον παραπάνω ορισμό το πλαίσιο του Chomicki ενσωματώνει την έννοια των μη-διατασσόμενων στοιχείων ως προς μια σχέση προτίμησης, κάτι το οποίο είδαμε και στο θεωρητικό μοντέλο των μερικών διατάξεων στο Κεφάλαιο 2 (Ορισμός 2.2).

Δεδομένης μιας ορισμένης σχέσης προτίμησης, ο Chomicki *δεν της αποδίδει εξ ορισμού κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες*. Δεδομένου ότι στη δική μας προσέγγιση περιοριζόμαστε σε προτιμήσεις που ορίζονται ως μερικές διατάξεις πάνω σε σύνολα τιμών, σε αυτό το κεφάλαιο εστιάζουμε περισσότερο στην εκφραστική δυνατότητα του πλαισίου του Chomicki να χειριστεί τέτοιου είδους διατάξεις.

Όπως ξέρουμε, η λογική πρώτης τάξης είναι αρκετά ευέλικτη και πλούσια στην έκφραση ισχυρισμών. Ωστόσο, καθώς ο Chomicki εστιάζει το ενδιαφέρον του στο σχεσιακό μοντέλο δεδομένων που περικλείει τιμές που ανήκουν σε αριθμητικούς (numerical) και μη αριθμητικούς (non-numerical) τύπους δεδομένων, οι ενδογενείς φόρμουλες προτίμησης του πλαισίου του απαρτίζονται από εκφράσεις που ανήκουν σε τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω δύο είδη περιορισμών:

1. *Περιορισμοί ισότητας:* $x = y$, $x \neq y$, $x = V$ ή $x \neq V$, όπου V μια *τιμή ενός μη αριθμητικού τύπου δεδομένων* και x, y μεταβλητές του συνόλου των μη αριθμητικών τιμών *του τύπου αυτού*,
2. *Αριθμητικοί περιορισμοί:* $x \theta y$ ή $x \theta V$, όπου $\theta \in \{=, \neq, <, >, \leq, \geq\}$, V μια *τιμή ενός αριθμητικού τύπου δεδομένων* και x, y μεταβλητές του συνόλου των αριθμητικών τιμών *του τύπου αυτού*.

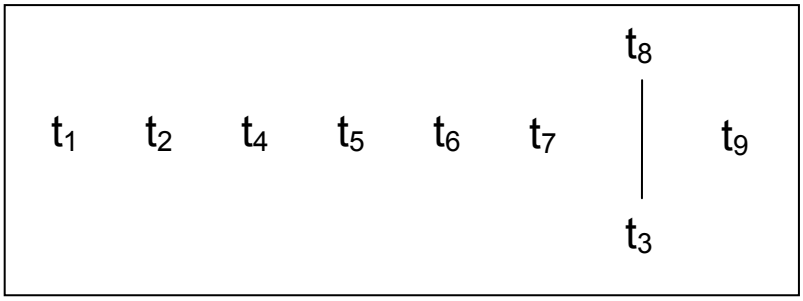
Απ' ότι παρατηρούμε, το πλήθος των ενδογενών φόρμουλων προτίμησης που μπορούν να καθοριστούν με βάση τα παραπάνω είδη περιορισμών είναι πολύ μεγάλο, οπότε και οι αντίστοιχες σχέσεις προτίμησης που ορίζονται από τις φόρμουλες αυτές καλύπτουν ένα πλατύ εύρος από εκφράσεις προτιμήσεων. Για να γίνουμε πιο ξεκάθαροι όσον αφορά την έκφραση προτιμήσεων με τη χρήση των ενδογενών φόρμουλων προτίμησης του πλαισίου του Chomicki, αλλά και τη διάταξη των πλειάδων μέσω των προτιμήσεων αυτών, παρακάτω παραθέτουμε έναν αριθμό από ενδεικτικά παραδείγματα, στα οποία οι σχέσεις προτίμησης που ορίζονται αποτελούν αυστηρές μερικές διατάξεις[3]:

Παράδειγμα 4.1: Υποθέτουμε το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1. Επίσης, έστω ότι ένας χρήστης δηλώνει ότι σε περίπτωση που το παιχνίδι είναι παιχνίδι διοίκησης (manager), τότε προτιμά να έχει τη μικρότερη δυνατή τιμή. Η προτίμηση αυτή αποτελεί για τον Chomicki ένα είδος *προτίμησης υπό συνθήκη (conditional preference)*, εφόσον εφαρμόζεται *μόνο στην περίπτωση που το παιχνίδι είναι παχνίδι διοίκησης*, η οποία προτίμηση εκφράζεται μέσω της παρακάτω ενδογενούς φόρμουλας προτίμησης C_1 στον πίνακα *PCGames:*

[3] Είναι δυνατόν σχέσεις προτίμησης που ορίζονται από ενδογενείς φόρμουλες προτίμησης του Chomicki να *μην* αποτελούν αυστηρές μερικές διατάξεις, εφόσον αρκετές φορές παραβιάζουν τουλάχιστον μια από τις τρεις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τις διατάξεις αυτές .

$C_1 : (n,c,y,p) \succ_{C_1} (n',c',y',p') \equiv (c = "Manager") \wedge (c' = "Manager") \wedge (p < p')$.

Η σχέση προτίμησης $\succ_{C_1}$ που ορίζεται από τη φόρμουλα C_1, αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη του καρτεσιανού γινομένου $N \times C \times Y \times P$ των πεδίων τιμών των γνωρισμάτων του *PCGames*, εφόσον μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι είναι μη-ανακλαστική και μεταβατική στο $N \times C \times Y \times P$. Αν θεωρήσουμε ως t_i την πλειάδα που βρίσκεται στην i-οστή θέση στο στιγμιότυπο της Εικόνας 4.1, τότε, με βάση το Λήμμα 2.7, το σύνολο $T = \{t_1,...,t_9\}$ είναι αυστηρά μερικώς διατεταγμένο ως προς την $\succ_{C_1}$, εφόσον $T \subset N \times C \times Y \times P$. Η Εικόνα 4.2 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του T, το οποίο και αναπαριστά επαρκώς τη διάταξη των πλειάδων στην Εικόνα 4.1, μέσω της $\succ_{C_1}$. Για οποιεσδήποτε δύο πλειάδες $t,t' \in T$, όπου δεν υπάρχει μονοπάτι ανοδικών ακμών που να τις συνδέει, ισχύει ότι $t \cong_{C_1} t'$. □



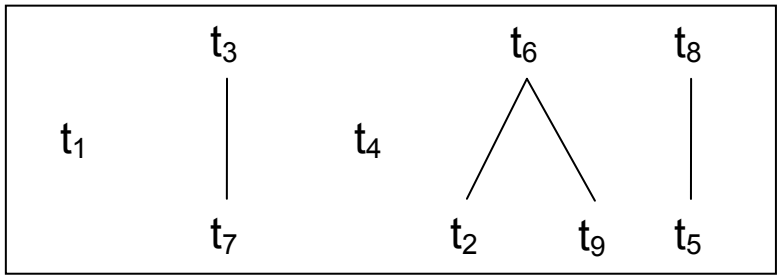
Εικόνα 4.2 - Το διάγραμμα Hasse του T (μέσω της $\succ_{C_1}$)

Παράδειγμα 4.2: Έστω ξανά το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1. Επίσης, έστω ότι ένας χρήστης δηλώνει ότι μεταξύ των παιχνιδιών της ίδιας χρονιάς, προτιμά αυτά με τη μικρότερη δυνατή τιμή. Η προτίμηση αυτή αποτελεί για τον Chomicki ένα είδος *προτίμησης ομαδοποίησης (groupwise preference)*, εφόσον εφαρμόζεται *ουσιαστικά μεταξύ παιχνιδιών που ομαδοποιούνται μέσω της ίδιας χρονολογίας*, η οποία προτίμηση εκφράζεται μέσω της παρακάτω ενδογενούς φόρμουλας προτίμησης C_2 στον πίνακα *PCGames:*

$C_2 : (n,c,y,p) \succ_{C_2} (n',c',y',p') \equiv (y = y') \wedge (p < p')$.

Και η σχέση προτίμησης $\succ_{C_2}$ που ορίζεται από τη φόρμουλα C_2, αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη του καρτεσιανού γινομένου $N \times C \times Y \times P$ των πεδίων

τιμών των γνωρισμάτων του *PCGames*, εφόσον μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι είναι μη-ανακλαστική και μεταβατική στο $N \times C \times Y \times P$. Άρα, το σύνολο $T = \{t_1, ..., t_9\} \subset N \times C \times Y \times P$ είναι αυστηρά μερικώς διατεταγμένο ως προς αυτήν (Λήμμα 2.7). Η Εικόνα 4.3 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του T, μέσω της $\succ_{C_2}$. □

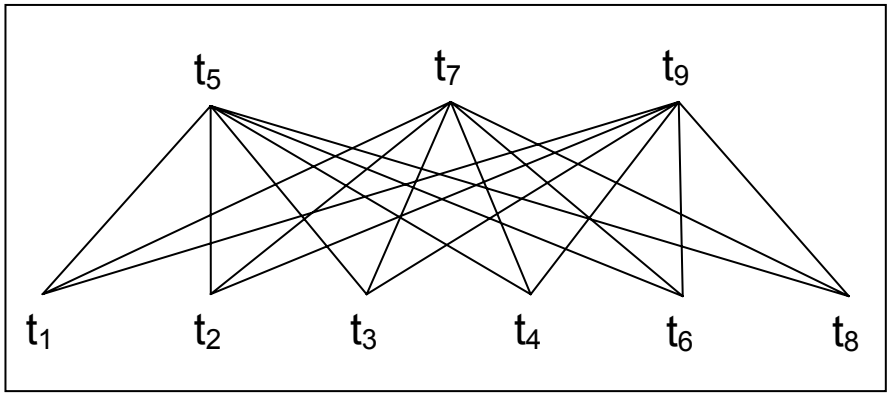


Εικόνα 4.3 - Το διάγραμμα Hasse του T (μέσω της $\succ_{C_2}$)

Παράδειγμα 4.3: Έστω ξανά το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1. Έστω ότι ένας χρήστης δηλώνει ότι προτιμά ένα παιχνίδι σε σχέση με ένα άλλο, άνν είναι παιχνίδι στρατηγικής (strategy) και το άλλο δεν είναι. Η προτίμηση αυτή αποτελεί για τον Chomicki ένα είδος *απόλυτης προτίμησης (absolute preference)*, εφόσον *εφαρμόζεται χωρίς την ύπαρξη κάποιας συνθήκης που πρέπει να ισχύει* (όπως στα Παραδείγματα 4.1 και 4.2), η οποία προτίμηση εκφράζεται μέσω της παρακάτω ενδογενούς φόρμουλας προτίμησης C_3 στον πίνακα *PCGames:*

$C_3 : (n, c, y, p) \succ_{C_3} (n', c', y', p') \equiv (c = \text{"}Strategy\text{"}) \wedge (c' \neq \text{"}Strategy\text{"})$.

Η σχέση προτίμησης $\succ_{C_3}$ που ορίζεται από τη φόρμουλα C_3, αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη του καρτεσιανού γινομένου $N \times C \times Y \times P$ των πεδίων τιμών των γνωρισμάτων του *PCGames*, εφόσον μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι είναι μη-ανακλαστική και μεταβατική στο $N \times C \times Y \times P$. Άρα, το σύνολο $T = \{t_1, ..., t_9\} \subset N \times C \times Y \times P$ είναι αυστηρά μερικώς διατεταγμένο και ως προς αυτήν (Λήμμα 2.7). Η Εικόνα 4.4 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του T, μέσω της $\succ_{C_3}$. □



Εικόνα 4.4 - Το διάγραμμα Hasse του T (μέσω της $\succ_{C_3}$)

4.1.1.1 Σύνθεση Σχέσεων Προτίμησης

Για τη *σύνθεση* των σχέσεων προτίμησης, το πλαίσιο του Chomicki προτείνει αρκετούς διαφορετικούς τρόπους, οι οποίοι διαχωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες:

1. *Μονοδιάστατη (Unidimensional) σύνθεση:* Στη μονοδιάστατη σύνθεση δύο ή περισσότερες σχέσεις προτίμησης πάνω σε *ένα* σχεσιακό πίνακα συντίθενται δημιουργώντας μια καινούρια σχέση προτίμησης πάνω στον πίνακα *αυτό*.
2. *Πολυδιάστατη (Multidimensional) σύνθεση:* Στην πολυδιάστατη σύνθεση δύο ή περισσότερες σχέσεις προτίμησης πάνω σε *διαφορετικούς* σχεσιακούς πίνακες συντίθενται δημιουργώντας μια καινούρια σχέση προτίμησης πάνω *στο καρτεσιανό γινόμενο αυτών των σχεσιακών πινάκων*.

Παρακάτω, αναλύουμε τις δύο παραπάνω κατηγορίες, παρουσιάζοντας τους ορισμούς και ενδεικτικά παραδείγματα των συνθέσεων προτιμήσεων που έχει αναπτύξει ο Chomicki σε κάθε μια από αυτές.

4.1.1.1.1 Μονοδιάστατη Σύνθεση

Στην κατηγορία αυτή, το πλαίσιο του Chomicki έχει αναπτύξει δύο είδη σύνθεσης μεταξύ δύο σχέσεων προτίμησης: Την *λογική σύνθεση (Boolean composition)* και τη *σύνθεση προτεραιότητας (prioritized composition)*.

Με τον όρο *λογική σύνθεση*, ο Chomicki εννοεί οποιαδήποτε σύνθεση δύο σχέσεων προτίμησης η οποία μπορεί να εκφραστεί με *λογικές πράξεις πάνω στις αντίστοιχες ενδογενείς φόρμουλες προτίμησης των σχέσεων αυτών*. Οι κύριες συνθέσεις αυτού του είδους είναι η *ένωση (union)*, η *τομή (intersection)* και η *διαφορά (set difference)*. Παρακάτω, παραθέτουμε τους ορισμούς τους δεδομένων δύο σχέσεων προτίμησης $\succ_C$ και $\succ_{C'}$, καθώς επίσης και ενδεικτικά παραδείγματα των συνθέσεων αυτών, όπου οι συνιστώσες σχέσεις προτίμησης αποτελούν αυστηρές μερικές διατάξεις:

Ορισμός 4.3: *Έστω σχεσιακός πίνακας* $R(A_1,...,A_n)$, *και* $\succ_C, \succ_{C'}$ *δύο σχέσεις προτίμησης στον* R. *Επίσης, έστω* C_U *μια φόρμουλα προτίμησης πάνω στον* R *που ορίζει μια αντίστοιχη σχέση προτίμησης* $\succ_{C_U}$ *στον* R, *ως εξής:*

$$t_i \succ_{C_U} t_j \equiv t_i \succ_C t_j \vee t_i \succ_{C'} t_j \text{, όπου } t_i, t_j \in dom(A_1) \times \cdots \times dom(A_n)$$

Τότε, η $\succ_{C_U}$ *αποτελεί την ένωση των* $\succ_C$ *και* $\succ_{C'}$, *η οποία συμβολίζεται ως* $\succ_C \cup \succ_{C'}$. □

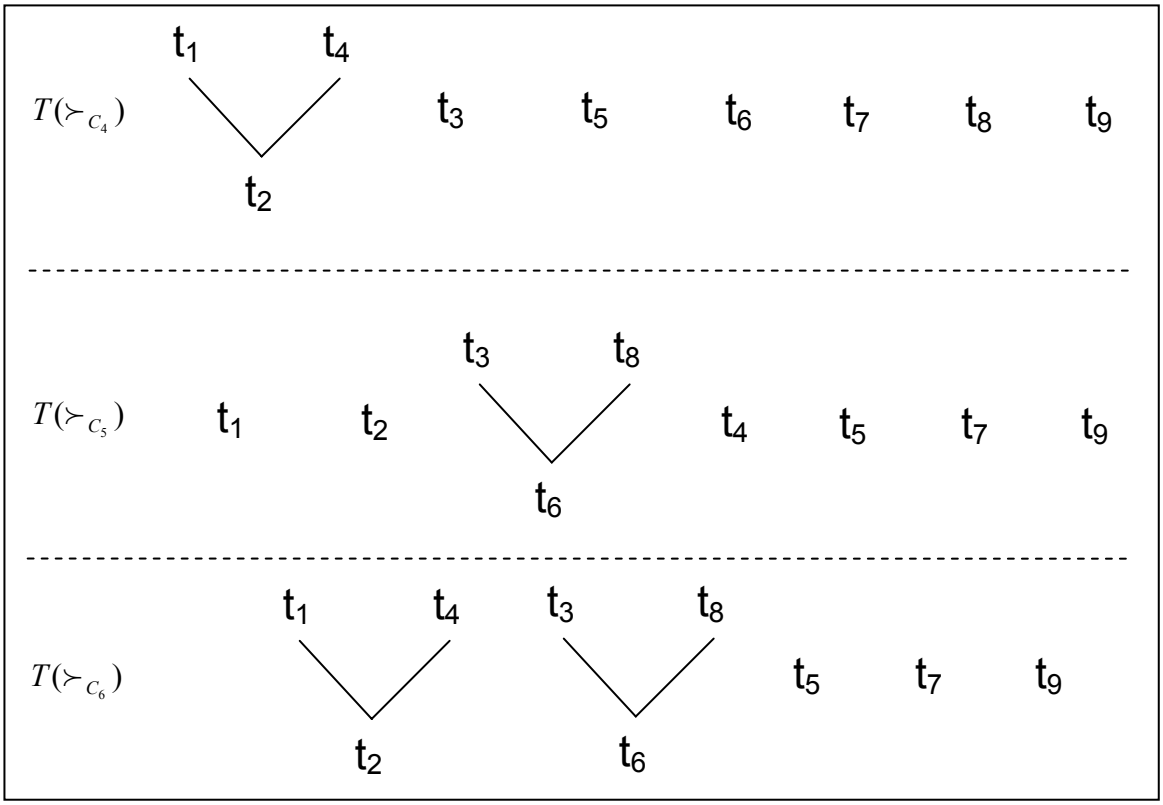
Παράδειγμα 4.4: Έστω ξανά το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1. Επίσης, έστω ότι ένας χρήστης δηλώνει ότι προτιμά ένα παιχνίδι σε σχέση με ένα άλλο άνν το πρώτο είναι παιχνίδι περιπέτειας (adventure) και το δεύτερο παιχνίδι προσομοίωσης (simulation) ή το πρώτο είναι παιχνίδι διοίκησης (manager) και το δεύτερο παιχνίδι δράσης-περιπέτειας (action-adventure) . Η προτίμηση αυτή, αποτελεί την ένωση $\succ_{C_6}$ δύο σχέσεων προτίμησης $\succ_{C_4}$ και $\succ_{C_5}$, ($\succ_{C_6} = \succ_{C_4} \cup \succ_{C_5}$), όπου οι $\succ_{C_4}$ και $\succ_{C_5}$ ορίζονται από τις παρακάτω αντίστοιχες ενδογενείς φόρμουλες προτίμησης C_4 και C_5 πάνω στον πίνακα *PCGames*:

$$C_4 : (n,c,y,p) \succ_{C_4} (n',c',y',p') \equiv (c = "Adventure") \wedge (c' = "Simulation")$$

$$C_5 : (n,c,y,p) \succ_{C_5} (n',c',y',p') \equiv (c = "Manager") \wedge (c' = "Action - Adventure")$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι σχέσεις προτίμησης $\succ_{C_4}$ και $\succ_{C_5}$, καθώς και η ένωσή τους $\succ_{C_6}$, είναι μη-ανακλαστικές και μεταβατικές στο καρτεσιανό

γινόμενο $N \times C \times Y \times P$ των πεδίων τιμών των γνωρισμάτων του *PCGames*, οπότε και αποτελούν αυστηρές μερικές διατάξεις αυτού[4]. Άρα, δεδομένου του Λήμματος 2.7, οι $\succ_{C_4}$, $\succ_{C_5}$ και $\succ_{C_6}$ αποτελούν αυστηρές μερικές διατάξεις του συνόλου $T = \{t_1,...,t_9\} \subset N \times C \times Y \times P$. Η Εικόνα 4.5 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του T μέσω των $\succ_{C_4}$, $\succ_{C_5}$ και $\succ_{C_6}$. □



Εικόνα 4.5 - Τα διαγράμματα Hasse του T μέσω των $\succ_{C_4}$, $\succ_{C_5}$ και $\succ_{C_6} = \succ_{C_4} \cup \succ_{C_5}$

Ορισμός 4.4: *Έστω σχεσιακός πίνακας $R(A_1,...,A_n)$, και $\succ_C, \succ_{C'}$ δύο σχέσεις προτίμησης στον R. Επίσης, έστω C_I μια φόρμουλα προτίμησης στον R που ορίζει μια αντίστοιχη σχέση προτίμησης $\succ_{C_I}$ στον R, ως εξής:*

$$t_i \succ_{C_I} t_j \equiv t_i \succ_C t_j \wedge t_i \succ_{C'} t_j, \text{ όπου } t_i, t_j \in dom(A_1) \times \cdots \times dom(A_n)$$

Τότε, η $\succ_{C_I}$ αποτελεί την τομή των $\succ_C$ και $\succ_{C'}$, η οποία συμβολίζεται ως $\succ_C \cap \succ_{C'}$.□

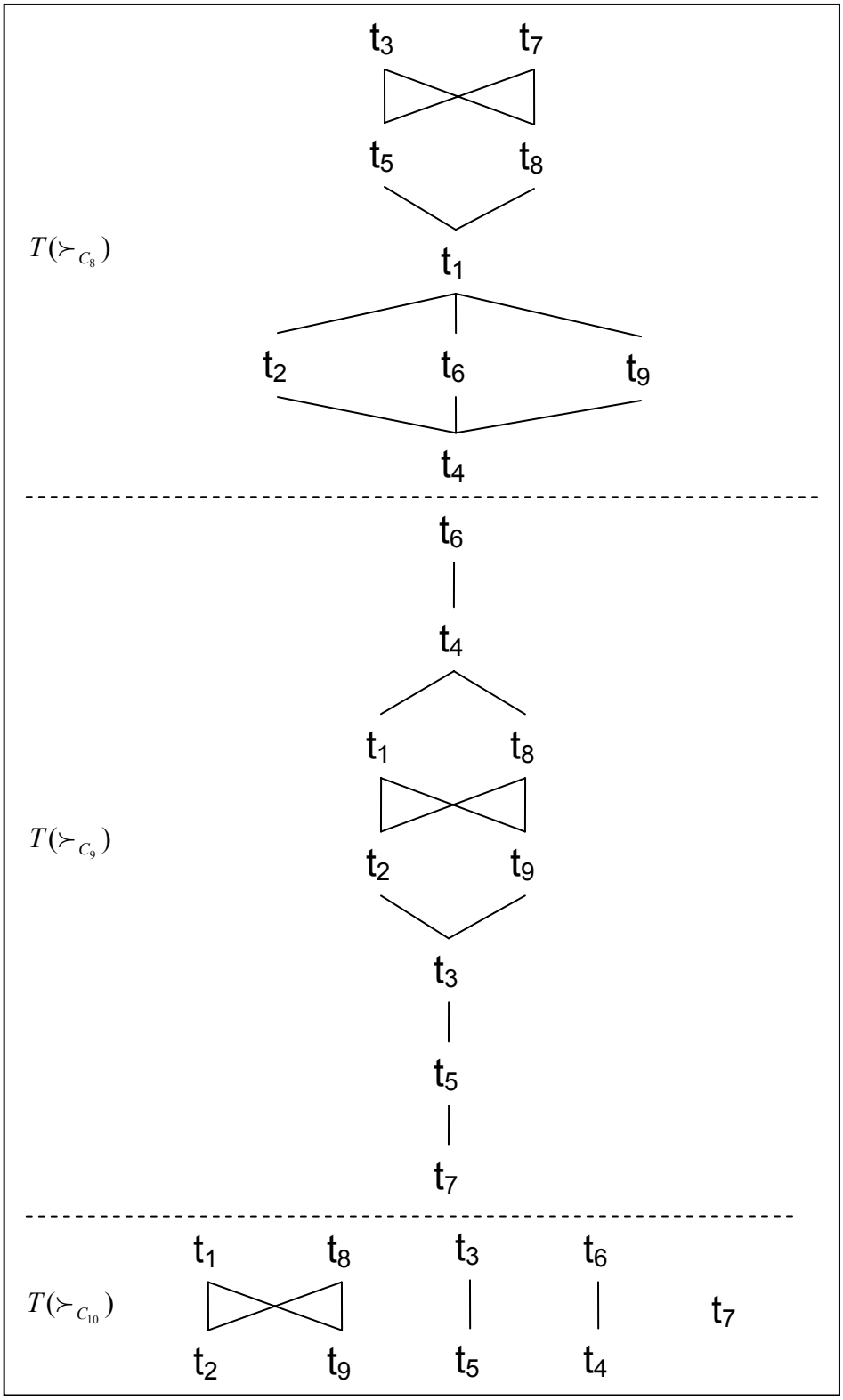
[4] Αξίζει να σημειωθεί ότι αναφερόμαστε για την ένωση των *συγκεκριμένων* συνιστωσών σχέσεων προτίμησης του Παραδείγματος 4.4 και *όχι* για την ένωση δύο *οποιωνδήποτε* σχέσεων προτίμησης στο πλαίσιο του Chomicki. Με το ίδιο σκεπτικό βαδίζουν και *όλα* τα επόμενα παραδείγματα που αφορούν τα είδη σύνθεσης που προτείνει ο Chomicki.

Παράδειγμα 4.5: Έστω το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1. Επίσης, έστω ότι ένας χρήστης δηλώνει ότι προτιμά ένα παιχνίδι σε σχέση με ένα άλλο άνν έχει πιο πρόσφατη χρονολογία έκδοσης και μικρότερη τιμή. Η προτίμηση αυτή, μπορεί να χαρακτηριστεί ως η τομή $\succ_{C_{10}}$ δύο σχέσεων προτίμησης $\succ_{C_8}$ και $\succ_{C_9}$, ($\succ_{C_{10}} = \succ_{C_8} \cap \succ_{C_9}$), όπου οι $\succ_{C_8}$ και $\succ_{C_9}$ ορίζονται από τις παρακάτω αντίστοιχες ενδογενείς φόρμουλες προτίμησης C_8 και C_9 πάνω στον πίνακα *PCGames*:

$C_8 : (n, c, y, p) \succ_{C_8} (n', c', y', p') \equiv (y > y')$

$C_9 : (n, c, y, p) \succ_{C_9} (n', c', y', p') \equiv (p < p')$

Αποδεικνύεται με τετριμμένο τρόπο ότι οι σχέσεις προτίμησης $\succ_{C_8}$ και $\succ_{C_9}$, καθώς και η τομή τους $\succ_{C_{10}}$, είναι μη-ανακλαστικές και μεταβατικές στο καρτεσιανό γινόμενο $N \times C \times Y \times P$ των πεδίων τιμών των γνωρισμάτων του *PCGames*, οπότε και αποτελούν αυστηρές μερικές διατάξεις αυτού. Άρα, δεδομένου του Λήμματος 2.7, οι $\succ_{C_8}$, $\succ_{C_9}$ και $\succ_{C_{10}}$ αποτελούν αυστηρές μερικές διατάξεις του συνόλου $T = \{t_1, ..., t_9\} \subset N \times C \times Y \times P$. Η Εικόνα 4.6 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του T μέσω των $\succ_{C_8}$, $\succ_{C_9}$ και $\succ_{C_{10}}$. □



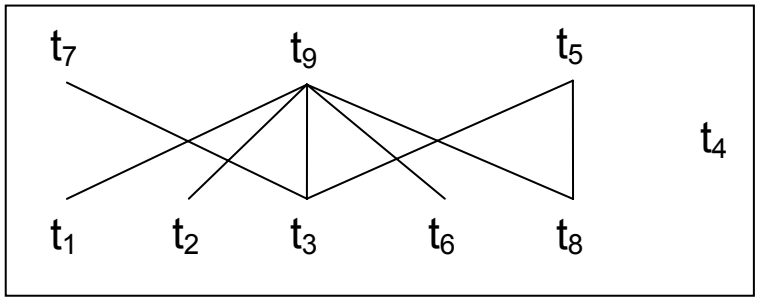
Εικόνα 4.6 - Τα διαγράμματα Hasse του T μέσω των $\succ_{C_8}$, $\succ_{C_9}$ και $\succ_{C_{10}} = \succ_{C_8} \cap \succ_{C_9}$

Ορισμός 4.5: *Έστω σχεσιακός πίνακας* $R(A_1,...,A_n)$, *και* $\succ_C, \succ_{C'}$ *δύο σχέσεις προτίμησης στην* R. *Επίσης, έστω* C_D *μια φόρμουλα προτίμησης στον* R *που ορίζει μια αντίστοιχη σχέση προτίμησης* $\succ_{C_D}$ *στον* R, *ως εξής:*

$$t_i \succ_{C_D} t_j \equiv t_i \succ_C t_j \wedge t_i \not\succ_{C'} t_j \text{, όπου } t_i, t_j \in dom(A_1) \times \cdots \times dom(A_n)$$

Τότε, η $\succ_{C_D}$ *αποτελεί την διαφορά των* $\succ_C$ *και* $\succ_{C'}$, *η οποία συμβολίζεται ως* $\succ_C - \succ_{C'}$.□

Παράδειγμα 4.6: Έστω το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1. Επίσης, έστω ότι ένας χρήστης δηλώνει ότι προτιμά ένα παιχνίδι σε σχέση με ένα άλλο άνν είναι παιχνίδι στρατηγικής (strategy) και το άλλο δεν είναι, και *δεν* έχει μεγαλύτερη χρονολογία έκδοσης σε σχέση μ' αυτό. Η προτίμηση αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί ως η διαφορά $\succ_{C_{11}}$ μεταξύ των σχέσεων προτίμησης $\succ_{C_3}$ του Παραδείγματος 4.3 και $\succ_{C_8}$ του Παραδείγματος 4.5 στον πίνακα *PCGames* ($\succ_{C_{11}} = \succ_{C_3} - \succ_{C_8}$). Απ' ότι παρατηρούμε, η σύνθεση αυτή ορίζει σχέσεις προτίμησης λαμβάνοντας υπόψη συσχετίσεις που *δεν ισχύουν* στη δεύτερη συνιστώσα σχέση. Όπως είδαμε στα Παραδείγματα 4.3 και 4.5, οι $\succ_{C_3}$ και $\succ_{C_8}$ αποτελούν αυστηρές μερικές διατάξεις του $N \times C \times Y \times P$. Επίσης, αποδεικνύεται τετριμμένα ότι η $\succ_{C_{11}}$ είναι μη-ανακλαστική και μεταβατική στο $N \times C \times Y \times P$, οπότε και αυτή αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη του $N \times C \times Y \times P$, καθώς και του $T = \{t_1,...,t_9\} \subset N \times C \times Y \times P$ (μέσω Λήμματος 2.7). Η Εικόνα 4.7 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του T, μέσω της $\succ_{C_{11}}$.□



Εικόνα 4.7 - Το διάγραμμα Hasse του T (μέσω της $\succ_{C_{11}} = \succ_{C_1} - \succ_{C_8}$)

Η σύνθεση προτεραιότητας αποτελεί είδος σύνθεσης στο οποίο οι δύο σχέσεις προτίμησης που συντίθενται, «διατάσσονται» με βάση τη δηλωμένη προτίμηση του χρήστη *πάνω σε αυτές*. Για να γίνει αυτό πιο ξεκάθαρο, παραθέτουμε τον ορισμό της σύνθεσης αυτής για δύο σχέσεις προτίμησης $\succ_C$ και $\succ_{C'}$, καθώς και ένα ενδεικτικό παράδειγμα, όπου οι συνιστώσες σχέσεις προτίμησης αποτελούν αυστηρές μερικές διατάξεις:

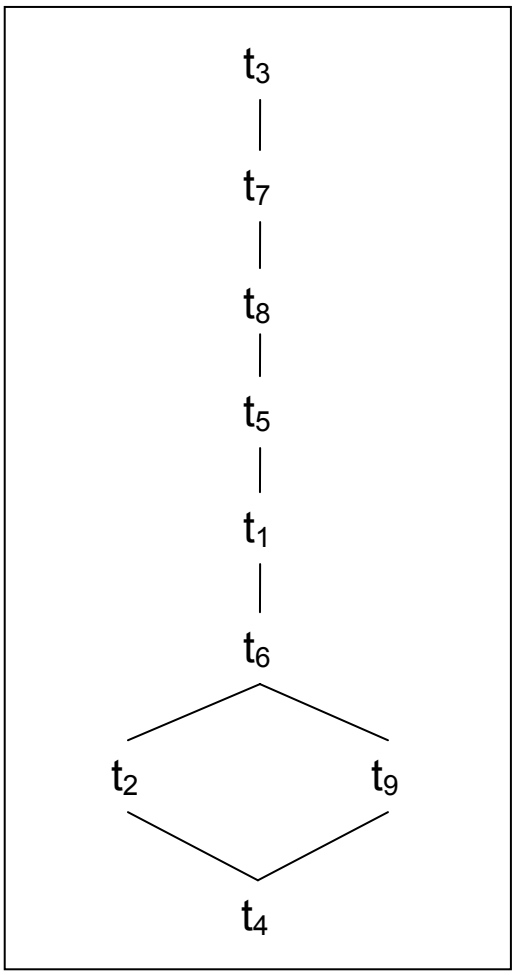
Ορισμός 4.6: *Έστω σχεσιακός πίνακας* $R(A_1,...,A_n)$, *και* $\succ_C, \succ_{C'}$ *δύο σχέσεις προτίμησης στον* R. *Επίσης, έστω* $C_{\triangleright}$ *μια φόρμουλα προτίμησης στην* R *που ορίζει μια αντίστοιχη σχέση προτίμησης* $\succ_{C_{\triangleright}}$ *στον* R, *ως εξής:*

$t_i \succ_{C_{\triangleright}} t_j \equiv t_i \succ_C t_j \vee (t_i \cong_C t_j \wedge t_i \succ_{C'} t_j)$, *όπου* $t_i, t_j \in dom(A_1) \times \cdots \times dom(A_n)$

Τότε, η $\succ_{C_{\triangleright}}$ *αποτελεί τη σύνθεση προτεραιότητας των* $\succ_C$ *και* $\succ_{C'}$, *η οποία συμβολίζεται ως* $\succ_C \triangleright \succ_{C'}$.□

Απ' ότι παρατηρούμε, μέσω της $\succ_{C_{\triangleright}}$ δίνεται προτεραιότητα στην $\succ_C$ σε σχέση με την $\succ_{C'}$, καθότι η $\succ_{C'}$ λαμβάνεται υπόψη *μόνο όταν η* $\succ_C$ *δεν είναι εφαρμόσιμη.*

Παράδειγμα 4.7: Έστω το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1. Επίσης, έστω ότι ένας χρήστης δηλώνει ότι προτιμά ένα παιχνίδι σε σχέση με ένα άλλο άνν έχει, *πρωτίστως*, μεγαλύτερη χρονολογία έκδοσης και, *δευτερευόντως*, μικρότερη τιμή. Η προτίμηση αυτή αποτελεί τη σύνθεση προτεραιότητας $\succ_{C_{12}}$ των σχέσεων προτίμησης $\succ_{C_8}$ και $\succ_{C_9}$ του Παραδείγματος 4.5 στον πίνακα *PCGames* ($\succ_{C_{12}} = \succ_{C_8} \triangleright \succ_{C_9}$). Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 4.5, οι $\succ_{C_8}$ και $\succ_{C_9}$ αποτελούν αυστηρές μερικές διατάξεις του $N \times C \times Y \times P$. Επίσης, αποδεικνύεται τετριμμένα ότι η $\succ_{C_{12}}$ είναι μη-ανακλαστική και μεταβατική στο $N \times C \times Y \times P$, οπότε και αυτή αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη του $N \times C \times Y \times P$, καθώς και του $T = \{t_1,...,t_9\} \subset N \times C \times Y \times P$ (μέσω Λήμματος 2.7). Η Εικόνα 4.8 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του T, μέσω της $\succ_{C_{12}}$.□



Εικόνα 4.8 - Το διάγραμμα Hasse του T (μέσω της $\succ_{C_{12}} = \succ_{C_8} \triangleright \succ_{C_9}$)

4.1.1.1.2 Πολυδιάστατη Σύνθεση

Στην κατηγορία αυτή, το πλαίσιο του Chomicki έχει αναπτύξει δύο είδη σύνθεσης μεταξύ δύο σχέσεων προτίμησης: Τη σύνθεση κατά Pareto (Pareto composition) και τη λεξικογραφική σύνθεση (lexicographical composition).

Η σύνθεση κατά Pareto αποτελεί μια παραπλήσια εκδοχή του ορισμού της διάταξης μέσω συντεταγμένων (Ορισμός 2.10) πάνω σε δύο σχέσεις προτίμησης που εφαρμόζονται σε διαφορετικούς σχεσιακούς πίνακες. Για να γίνει αυτό πιο σαφές, παραθέτουμε τον ορισμό της για δύο σχέσεις προτίμησης $\succ_C$ και $\succ_{C'}$ πάνω σε δύο διαφορετικούς σχεσιακούς πίνακες καθώς και ένα ενδεικτικό παράδειγμα, όπου οι συνιστώσες σχέσεις προτίμησης αποτελούν αυστηρές μερικές διατάξεις:

Ορισμός 4.7: *Έστω* $R(A_1,...,A_n)$ *και* $S(B_1,...,B_m)$ *δύο σχεσιακοί πίνακες,* $\succ_C$ *μια σχέση προτίμησης στον* R *και* $\succ_{C'}$ *μια σχέση προτίμησης στον* S*. Η σύνθεση κατά Pareto* $P(\succ_C,\succ_{C'})$ *των* $\succ_C$ *και* $\succ_{C'}$ *είναι μια σχέση προτίμησης* $\succ_{C_P}$ *στο* $R\times S$*, τ.ώ.* $\forall t_i,t_j \in dom(A_1)\times\cdots\times dom(A_n)$ *και* $\forall t'_k,t'_l \in dom(B_1)\times\cdots\times dom(B_m)$*, να ισχύει:*

$$(t_i,t'_k)\succ_{C_P}(t_j,t'_l) \equiv t_i \succeq_C t_j \wedge t'_k \succeq_{C'} t'_l \wedge (t_i \succ_C t_j \vee t'_k \succ_{C'} t'_l)\ ,$$

όπου $\forall F \in \{C,C'\}$*,* $x\succeq_F y \equiv x\succ_F y \vee x \cong_F y$*.*□

Σημασιολογικά, η σύνθεση κατά Pareto διατάσσει τις πλειάδες του $R\times S$ χωρίς να υποδηλώνει κάποια ιδιαίτερη προτίμηση μεταξύ των $\succ_C$ και $\succ_{C'}$, εκφράζοντας έτσι μια *ισοδυναμία μεταξύ των σχέσεων* αυτών. Η διαφορά της σύνθεσης αυτής από την διάταξη μέσω συντεταγμένων (Ορισμός 2.11) είναι στο πώς αποδίδεται η έννοια της *ισοδυναμίας μεταξύ δύο στοιχείων*. Στη σύνθεση κατά Pareto, η ισοδυναμία δύο πλειάδων, όσον αφορά μια σχέση προτίμησης, μεταφράζεται στην *αδιαφορία* μεταξύ τους (Ορισμός 4.2), δηλαδή στη μη ύπαρξη διάταξης μεταξύ τους με βάση την σχέση αυτή. Από την άλλη πλευρά, στη διάταξη μέσω συντεταγμένων, η ισοδυναμία μεταξύ δύο στοιχείων, όσον αφορά μια (αυστηρή) μερική διάταξη πάνω σε ένα σύνολο, μεταφράζεται στην *ισότητα (**'='**)* των στοιχείων αυτών.

Παράδειγμα 4.8: Έστω ότι το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 αναπαριστά τα διαθέσιμα παιχνίδια υπολογιστή στη βάση της ηλεκτρονικής σελίδας ενός μαγαζιού παιχνιδιών σε μια δεδομένη στιγμή. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το μαγαζί αυτό εμπορεύεται μέσω Διαδικτύου και επιτραπέζια παιχνίδια των οποίων τα χαρακτηριστικά περιγράφονται μέσω ενός σχεσιακού πίνακα *TableGames(TGName, TGCategory, TGPrice-in-Euro)* στη βάση της ηλεκτρονικής σελίδας του μαγαζιού, όπου *dom(TGName) = dom(Name) =* N, *dom(TGCategory) = TC = {"Puzzle", "Knowledge", "Mystery", "Board", "Card", "Marketing"}* και *dom(TGPrice-in-Euro) = dom(Price-in-Euro) =* P. Η Εικόνα 4.9 παρουσιάζει ένα στιγμιότυπο του πίνακα *TableGames*, το οποίο και

αναπαριστά τα διαθέσιμα επιτραπέζια παιχνίδια στη βάση της ηλεκτρονικής σελίδας του μαγαζιού σε μια δεδομένη στιγμή:

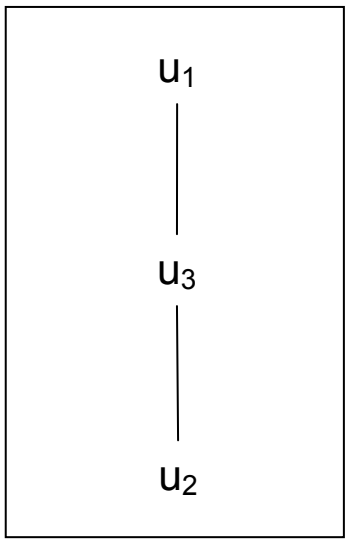
TGName	TGCategory	TGPrice-in-Euro
Pieces10000	Puzzle	15.50
TrivialPursuit	Knowledge	34.80
Monopoly	Marketing	25.00

Εικόνα 4.9 - Το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *TableGgames*

Έστω, τώρα, ότι ένας χρήστης θέλει να παραγγείλει ένα παιχνίδι υπολογιστή και ένα επιτραπέζιο και δηλώνει ότι προτιμά το παιχνίδι υπολογιστή να έχει την πιο πρόσφατη χρονολογία έκδοσης, και, *ισοδύναμα*, το επιτραπέζιο παιχνίδι να είναι το φθηνότερο δυνατό. Η προτίμηση αυτή αποτελεί τη σύνθεση κατά Pareto $\succ_{C_{14}} = P(\succ_{C_8}, \succ_{C_{13}})$ της σχέσης προτίμησης $\succ_{C_8}$ πάνω στον πίνακα $PCGames$ (Παράδειγμα 4.5) και μιας σχέσης προτίμησης $\succ_{C_{13}}$ πάνω στον πίνακα $TableGames$, όπου η $\succ_{C_{13}}$ ορίζεται μέσω της αντίστοιχης ενδογενούς φόρμουλας προτίμησης C_{13} στον πίνακα αυτό, ως εξής:

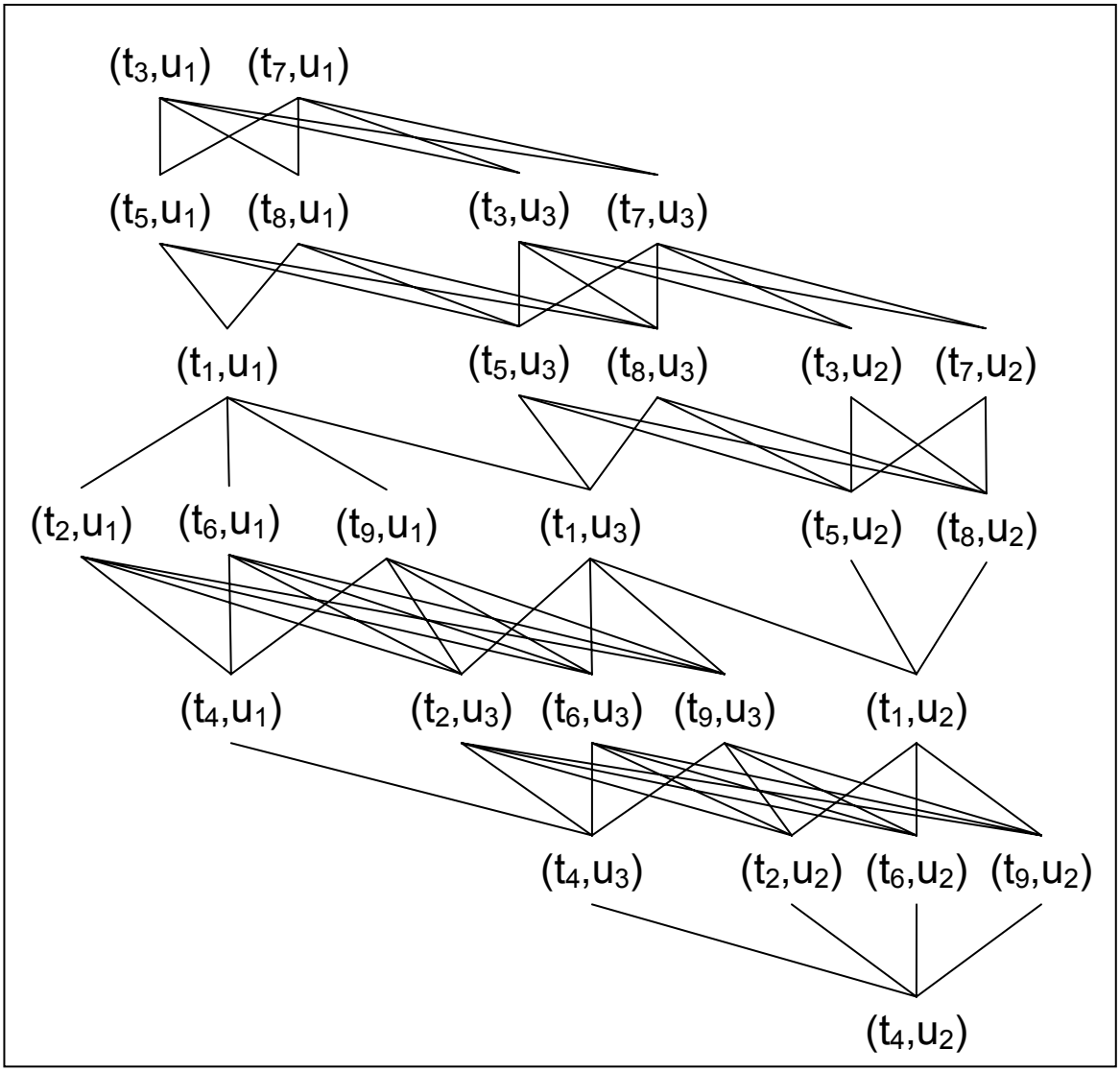
$C_{13} : (tn, tc, tp) \succ_{C_{13}} (tn', tc', tp') \equiv tp < tp'$.

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 4.5, η $\succ_{C_8}$ αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη του $N \times C \times Y \times P$, καθώς και του $T = \{t_1, ..., t_9\} \subset N \times C \times Y \times P$ (μέσω Λήμματος 2.7). Επίσης, αποδεικνύεται ότι η $\succ_{C_{13}}$ είναι μη-ανακλαστική και μεταβατική στο $N \times TC \times P$, οπότε αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη του συνόλου αυτού. Αν θεωρήσουμε ως u_i την πλειάδα που βρίσκεται στην i-οστή θέση στο στιγμιότυπο της Εικόνας 4.9, τότε, με βάση το Λήμμα 2.7, η $\succ_{C_{13}}$ είναι αυστηρή μερική διάταξη και του συνόλου $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, εφόσον $U \subset N \times TC \times P$. Η Εικόνα 4.10 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του U, μέσω της $\succ_{C_{13}}$.



Εικόνα 4.10 - Το διάγραμμα Hasse του U (μέσω της $\succ_{C_{13}}$)

Ομοίως, με τετριμμένο τρόπο αποδεικνύεται ότι η $\succ_{C_{14}}$ είναι μη-ανακλαστική και μεταβατική στο καρτεσιανό γινόμενο $PCGames \times TableGames = (N \times C \times Y \times P) \times (N \times TC \times P) = N \times C \times Y \times P \times N \times TC \times P$, οπότε και αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη του συνόλου αυτού. Όμως, καθώς $T \subset N \times C \times Y \times P$ και $U \subset N \times TC \times P$, τότε $T \times U \subset N \times C \times Y \times P \times N \times TC \times P$, οπότε, μέσω Λήμματος 2.7, η $\succ_{C_{14}}$ αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη και του $T \times U$. Η Εικόνα 4.11 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του $T \times U$ μέσω της $\succ_{C_{14}}$.□



Εικόνα 4.11 - Το διάγραμμα Hasse του $T \times U$ (μέσω της $\succ_{C_{14}} = P(\succ_{C_8}, \succ_{C_{13}})$)

Ομοίως, η λεξικογραφική σύνθεση στο πλαίσιο του Chomicki αποτελεί μια παραπλήσια εκδοχή του ορισμού της λεξικογραφικής διάταξης (Ορισμός 2.11) πάνω σε δύο σχέσεις προτίμησης που εφαρμόζονται σε διαφορετικούς σχεσιακούς πίνακες. Για να γίνει αυτό πιο ξεκάθαρο, παραθέτουμε τον ορισμό της για δύο σχέσεις προτίμησης $\succ_C$ και $\succ_{C'}$ πάνω σε δύο διαφορετικούς σχεσιακούς πίνακες καθώς και ένα ενδεικτικό παράδειγμα, όπου οι συνιστώσες σχέσεις προτίμησης αποτελούν αυστηρές μερικές διατάξεις:

Ορισμός 4.8: *Έστω $R(A_1,...,A_n)$ και $S(B_1,...,B_m)$ δύο σχεσιακοί πίνακες, $\succ_C$ μια σχέση προτίμησης στον R και $\succ_{C'}$ μια σχέση προτίμησης στον S. Η λεξικογραφική σύνθεση $L(\succ_C, \succ_{C'})$ των $\succ_C$ και $\succ_{C'}$ είναι μια σχέση*

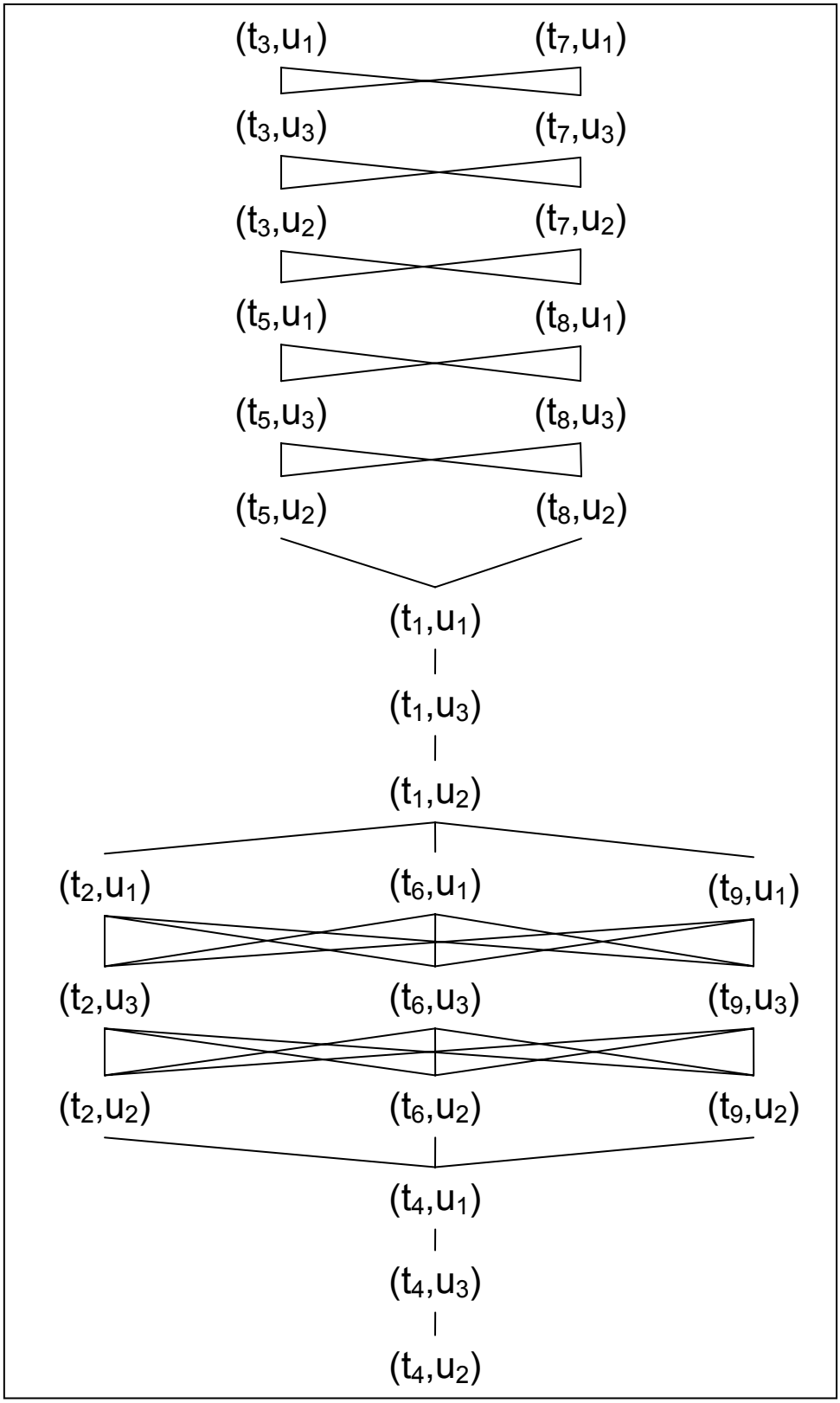
προτίμησης $\succ_{C_L}$ *στο* $R \times S$, *τέτοια ώστε* $\forall t_i, t_j \in dom(A_1) \times \cdots \times dom(A_n)$ *και* $\forall t'_k, t'_l \in dom(B_1) \times \cdots \times dom(B_m)$, *να ισχύει:*

$$(t_i, t'_k) \succ_{C_L} (t_j, t'_l) \equiv t_i \succ_C t_j \vee (t_i \cong_C t_j \wedge t'_k \succ_{C'} t'_l) .\square$$

Διαισθητικά, η λεξικογραφική σύνθεση διατάσσει τις πλειάδες του $R \times S$ δίνοντας *προτεραιότητα* στην $\succ_C$ σε σχέση με τη $\succ_{C'}$. Η διαφορά της από την λεξικογραφική διάταξη αποτελεί *ακριβώς* τη διαφορά της σύνθεσης κατά Pareto με τη διάταξη μέσω συντεταγμένων που είδαμε προηγουμένως, καθότι η λεξικογραφική σύνθεση και η λεξικογραφική διάταξη εκφράζουν την ίδια έννοια ισοδυναμίας μεταξύ δύο στοιχείων, σε σχέση με τη σύνθεση κατά Pareto και διάταξη μέσω συντεταγμένων αντίστοιχα. Επίσης, απ' ότι παρατηρούμε, η λεξικογραφική σύνθεση είναι σχεδόν παρόμοια με τη σύνθεση προτεραιότητας. Η μόνη τους διαφορά έγκειται στο ότι η σύνθεση προτεραιότητας μπορεί να εφαρμοστεί πάνω σε *ένα μόνο* σχεσιακό πίνακα, ενώ η λεξικογραφική σύνθεση σε *δύο ή και παραπάνω.*

Παράδειγμα 4.9: Έστω τα στιγμιότυπα των σχεσιακών πινάκων *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* και *TableGames(TGName, TGCategory, TGPrice-in-Euro)* στις Εικόνες 4.1 και 4.9 αντίστοιχα. Έστω ότι ένας χρήστης θέλει να παραγγείλει ένα παιχνίδι υπολογιστή και ένα επιτραπέζιο και δηλώνει ότι προτιμά, *πρωτίστως*, το παιχνίδι υπολογιστή να έχει τη μεγαλύτερη δυνατή χρονολογία έκδοσης, και, *δευτερευόντως*, το επιτραπέζιο παιχνίδι να είναι το φθηνότερο δυνατό. Η προτίμηση αυτή αποτελεί τη λεξικογραφική σύνθεση $\succ_{C_{15}}$ της σχέσης προτίμησης $\succ_{C_8}$ του Παραδείγματος 4.5 πάνω στον πίνακα *PCGames* και της σχέσης προτίμησης $\succ_{C_{13}}$ του Παραδείγματος 4.8 πάνω στον πίνακα *TableGames* ($\succ_{C_{15}} = L(\succ_{C_8}, \succ_{C_{13}})$). Όπως είδαμε στα Παραδείγματα 4.5 και 4.8, η $\succ_{C_8}$ αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη των συνόλων $N \times C \times Y \times P$ και $T = \{t_1, ..., t_9\} \subset N \times C \times Y \times P$, και η $\succ_{C_{13}}$ αυστηρή μερική διάταξη των συνόλων $N \times TC \times P$ και $U = \{u_1, u_2, u_3\} \subset N \times TC \times P$. Επίσης, αποδεικνύεται ότι η $\succ_{C_{15}}$ είναι μη-ανακλαστική και μεταβατική στο καρτεσιανό γινόμενο $PCGames \times$

$TableGames = (N \times C \times Y \times P) \times (N \times TC \times P) = N \times C \times Y \times P \times N \times TC \times P$, οπότε και αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη του $N \times C \times Y \times P \times N \times TC \times P$, καθώς και του $T \times U \subset N \times C \times Y \times P \times N \times TC \times P$ (μέσω Λήμματος 2.7). Η Εικόνα 4.12 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του $T \times U$, μέσω της $\succ_{C_{15}}$.□



Εικόνα 4.12 - Το διάγραμμα Hasse του $T \times U$ (μέσω της $\succ_{C_{15}} = L(\succ_{C_8}, \succ_{C_{13}})$)

4.1.1.1.3 Ιδιότητες Ειδών Σύνθεσης

Όπως είδαμε παραπάνω, ο Chomicki παραθέτει ένα σύνολο από είδη μονοδιάστατης και πολυδιάστατης σύνθεσης προτιμήσεων για τον καθορισμό πολύπλοκων εκφράσεων προτίμησης. Με βάση τους ορισμούς τους, μπορούμε να μελετήσουμε το κατά πόσο τα είδη αυτά χαρακτηρίζονται ή όχι από συγκεκριμένες ιδιότητες *τελεστών*. Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται σε τρεις κύριες ιδιότητες, τις οποίες και μεταφράζουμε στο πλαίσιο του Chomicki διαφορετικά, ανάλογα με το αν ο τελεστής είναι μονοδιάστασης ή πολυδιάστατης σύνθεσης:

a) Αντιμεταθετικότητα (Commutativity):
   i. Μονοδιάσταση Σύνθεση: Αν για οποιεσδήποτε δύο σχέσεις προτίμησης $\succ_C$ και $\succ_{C'}$ πάνω σε ένα σχεσιακό πίνακα R, $\succ_C \theta \succ_{C'} \equiv \succ_{C'} \theta \succ_C$, όπου $\theta \in \{\cup, \cap, -, \triangleright\}$.
   ii. Πολυδιάστατη Σύνθεση: Αν για οποιεσδήποτε σχέσεις προτίμησης $\succ_C$ πάνω σε ένα σχεσιακό πίνακα R και $\succ_{C'}$ πάνω σε ένα σχεσιακό πίνακα S, $X(\succ_C, \succ_{C'}) \equiv X(\succ_{C'}, \succ_C)$, όπου $X \in \{P, L\}$ (P για τη σύνθεση κατά Pareto και L για τη λεξικογραφική σύνθεση).

b) Προσεταιριστικότητα (Associativity):
   i. Μονοδιάσταση Σύνθεση: Αν για οποιεσδήποτε τρεις σχέσεις προτίμησης $\succ_C$, $\succ_{C'}$ και $\succ_{C''}$ πάνω σε ένα σχεσιακό πίνακα R, $(\succ_C \theta \succ_{C'}) \theta \succ_{C''} \equiv \succ_C \theta (\succ_{C'} \theta \succ_{C''})$, όπου $\theta \in \{\cup, \cap, -, \triangleright\}$.
   ii. Πολυδιάστατη Σύνθεση: Αν για οποιεσδήποτε σχέσεις προτίμησης $\succ_C$ πάνω σε ένα σχεσιακό πίνακα R, $\succ_{C'}$ πάνω σε ένα σχεσιακό πίνακα S και $\succ_{C''}$ πάνω σε ένα σχεσιακό πίνακα T, $X(X(\succ_C, \succ_{C'}), \succ_{C''}) \equiv X(\succ_C, X(\succ_{C'}, \succ_{C''}))$, όπου $X \in \{P, L\}$.

c) Επιμεριστικότητα (Distributivity) ως προς άλλο τελεστή:
   i. Μονοδιάσταση Σύνθεση: Αν για οποιεσδήποτε τρεις σχέσεις προτίμησης $\succ_C$, $\succ_{C'}$ και $\succ_{C''}$ πάνω σε ένα σχεσιακό πίνακα R, $\succ_C \theta (\succ_{C'} \theta' \succ_{C''}) \equiv (\succ_C \theta \succ_{C'}) \theta' (\succ_C \theta \succ_{C''})$, όπου $\theta \in \{\cup, \cap, -, \triangleright\}$ και $\theta' \in \{\cup, \cap, -, \triangleright\} / \theta$.

ii. Πολυδιάστατη Σύνθεση: Αν για οποιεσδήποτε σχέσεις προτίμησης $\succ_C$ πάνω σε ένα σχεσιακό πίνακα R και $\succ_{C'}, \succ_{C''}$ πάνω σε ένα σχεσιακό πίνακα S, $X(\succ_C, \succ_{C'} \theta \succ_{C''}) \equiv X(\succ_C, \succ_{C'}) \theta X(\succ_C, \succ_{C''})$, όπου $X \in \{P, L\}$ και $\theta \in \{\cup, \cap, -, \triangleright\}$.

Ο Πίνακας 4.1 παρουσιάζει τα συμπεράσματα της μελέτης μας όσον αφορά την αντιμεταθετικότητα, την προσεταιριστικότητα και την επιμεριστικότητα των ειδών σύνθεσης του Chomicki, με βάση τους Ορισμούς 4.3 - 4.8:

Είδος Σύνθεσης	**Αντιμεταθετική**	**Προσεταιριστική**	**Επιμεριστική ως προς**
Ένωση ($\cup$)	Ναι	Ναι	$\cap$, $\triangleright$
Τομή ($\cap$)	Ναι	Ναι	$\cup$, $-$
Διαφορά ($-$)	Όχι	Όχι	Κανένα
Σύνθεση Προτεραιότητας ($\triangleright$)	Όχι	Ναι	$\cup$, $\cap$
Σύνθεση κατά Pareto ($P(a,b)$)	Ναι	Ναι	$\cup$, $\cap$, $\triangleright$
Λεξικογραφική Σύνθεση ($L(a,b)$)	Όχι	Ναι	$\cup$, $\cap$, $\triangleright$

Πίνακας 4.1 - Ιδιότητες των ειδών σύνθεσης του Chomicki

4.1.1.1.4 Διατήρηση της Αυστηρής Μερικής Διάταξης

Στις προηγούμενες υπο-ενότητες μελετήσαμε το πλαίσιο του Chomicki πάνω στα είδη σύνθεσης προτιμήσεων, τα οποία και ορίζουν καινούριες (σύνθετες) προτιμήσεις. Εφόσον στη δική μας προσέγγιση οι προτιμήσεις αντιμετωπίζονται ως (αυστηρές) μερικές διατάξεις, τότε, για να μπορέσουμε να αξιολογήσουμε την εκφραστικότητα του πλαισίου για τις διατάξεις αυτές, είναι απαραίτητο να εξεταστεί κατά πόσο τα παραπάνω είδη σύνθεσης προτιμήσεων *διατηρούν εν γένει τις ιδιότητες των (αυστηρών) μερικών*

διατάξεων, στην περίπτωση που οι συνιστώσες προτιμήσεις αποτελούν (αυστηρές) μερικές διατάξεις. Στα Παραδείγματα 4.4 - 4.9, οι συγκεκριμένες συνιστώσες σχέσεις προτίμησης που χρησιμοποιούνται και οι οποίες αποτελούν αυστηρές μερικές διατάξεις, επιλέχτηκαν με σκοπό οι εκάστοτε συνθέσεις τους να είναι και αυτές αυστηρές μερικές διατάξεις, έτσι ώστε να μπορέσουμε να μελετήσουμε μέρος της σημασιολογίας των συνθέσεων αυτών μέσω των Hasse διαγραμμάτων. Ωστόσο, είναι δυνατόν η σύνθεση, μέσω ενός από τα παραπάνω είδη, δύο συγκεκριμένων συνιστωσών προτιμήσεων που είναι αυστηρές μερικές διατάξεις να *μην αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη*. Π.χ., για την ένωση $\succ_{C_{U'}} = \succ_{C_8} \cup \succ_{C_9}$ των σχέσεων προτίμησης $\succ_{C_8}$ και $\succ_{C_9}$ του Παραδείγματος 4.5 (οι οποίες είναι αυστηρές μερικές διατάξεις) έχουμε ότι $t_9 \succ_{C_{U'}} t_4$ και $t_4 \succ_{C_{U'}} t_9$, οπότε η $\succ_{C_{U'}}$ *δεν αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη*, εφόσον παραβιάζει την μη-συμμετρική ιδιότητα. Ο Chomicki στο [7] μελέτησε τη διατήρηση της αυστηρής μερικής διάταξης[5] των ειδών σύνθεσης του πλαισίου του και τα αποτελέσματά του παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2:

Είδος Σύνθεσης	**Διατήρηση Αυστηρής Μερικής Διάταξης**
Ένωση	Όχι
Τομή	Ναι
Διαφορά	Όχι
Σύνθεση Προτεραιότητας	Όχι
Σύνθεση κατά Pareto	Όχι
Λεξικογραφική Σύνθεση	Όχι

Πίνακας 4.2 – Διατήρηση της αυστηρής μερικής διάταξης στα είδη σύνθεσης του Chomicki

Απ' ότι παρατηρούμε, λόγω των αρκετά γενικευμένων ορισμών των ειδών σύνθεσης, η αυστηρή μερική διάταξη διατηρείται *μόνο* στην τομή. Οπότε, το πλαίσιο του Chomicki είναι αρκετά περιοριστικό με βάση την αντιμετώπιση των προτιμήσεων ως αυστηρές μερικές διατάξεις. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι εφόσον υπάρχει μια διαισθητική ισοδυναμία μεταξύ των μερικών και των

[5] Δοσμένων δύο *οποιωνδήποτε* σχέσεων προτίμησης που αποτελούν (αυστηρές) μερικές διατάξεις, αν οι νέες σχέσεις προτίμησης που δημιουργούν αυτά τα είδη σύνθεσης είναι *πάντα* (αυστηρές) μερικές διατάξεις

αυστηρών μερικών διατάξεων (όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2), ο Πίνακας 4.2 μπορεί να γενικευτεί *και για τη μερική διάταξη.*

4.1.1.2 Καθορισμός Καλύτερων Πλειάδων

Για τον καθορισμό των *καλύτερων πλειάδων* με βάση κάποια σχέση προτίμησης σε ένα σχεσιακό πίνακα, ο Chomicki εισάγει έναν τελεστή που ονομάζεται *«τελεστής διαλογής» (winnow operator)*, και ο οποίος και ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 4.9: *Αν* $R(A_1,...,A_n)$ *είναι ένας σχεσιακός πίνακας και* C *μια φόρμουλα προτίμησης που ορίζει μια σχέση προτίμησης* $\succ_C$ *στον* R*, τότε ο τελεστής διαλογής συμβολίζεται ως* $\omega_C(R)$*, και για κάθε στιγμιότυπο* r *του* R*, έχουμε:*

$$\omega_C(r) = \{t \in r \mid \neg\exists t' \in r : t' \succ_C t\}.\square$$

Όπως βλέπουμε, μέσω του τελεστή αυτού, μια πλειάδα που ανήκει σε ένα στιγμιότυπο r' του πίνακα R θεωρείται καλύτερη όταν *δεν υπάρχει πλειάδα στο* r' *που να προηγείται αυτής, μέσω της ορισμένης σχέσης προτίμησης* $\succ_C$ *στον* R*.* Όπως αποδεικνύεται στο [7], για τον τελεστή διαλογής του πλαισίου του Chomicki ισχύει το παρακάτω *βασικό* θεώρημα για τη λειτουργικότητά του στο σχεσιακό περιβάλλον:

Θεώρημα 4.1: *Η εκφραστική δυνατότητα της τυπικής σχεσιακής άλγεβρας (standard relational algebra) δεν αλλάζει αν η διαφορά (set difference) αντικατασταθεί από τον τελεστή διαλογής.* □

Στο παραπάνω θεώρημα, η σχεσιακή άλγεβρα περιλαμβάνει ως συνήθως τους τελεστές: επιλογή (selection), προβολή (projection), Καρτεσιανό γινόμενο (Cartesian product), ένωση (union), διαφορά (set difference) και μετονομασία (renaming). Απ' ότι βλέπουμε, η εκάστοτε προτίμηση ενός χρήστη που αναπαρίσταται από τον Chomicki ως μια συγκεκριμένη σχέση προτίμησης,

ενσωματώνεται στη σχεσιακή άλγεβρα μέσω του τελεστή διαλογής, έχοντας ως αποτέλεσμα τη δυνατότητα δημιουργίας επερωτήσεων (queries) σχετικών με την προτίμηση αυτή. Για τον λόγο αυτό, σχεσιακές επερωτήσεις όπου *ο τελεστής διαλογής εμφανίζεται τουλάχιστον μια φορά*, ο Chomicki τις ονομάζει *επερωτήσεις προτίμησης (preference queries).*

Όπως ξέρουμε, στο πλαίσιο του Chomicki *δεν αποδίδονται εξ ορισμού συγκεκριμένες ιδιότητες (όπως μη-συμμετρικότητα, μεταβατικότητα κ.τ.λ.) στις σχέσεις προτίμησης*. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να υπάρχουν περιπτώσεις όπου ο τελεστής διαλογής να επιστρέψει το κενό σύνολο, και να προκύψει πρόβλημα κενής απάντησης (empty query result problem) σε μια αντίστοιχη επερώτηση προτίμησης. Για να γίνει αυτό πιο σαφές, παρακάτω παραθέτουμε ένα ενδεικτικό παράδειγμα:

Παράδειγμα 4.10: Έστω Σ το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω η σχέση προτίμησης $\succ_{C_{16}}$ πάνω στον *PCGames*, η οποία και ορίζεται από την παρακάτω ενδογενή φόρμουλα προτίμησης C_{16} στον πίνακα αυτό:

$C_{16} : (n,c,y,p) \succ_{C_{16}} (n',c',y',p') \equiv (y < y') \vee ((c = "Strategy") \wedge (c' \neq "Strategy"))$.

Όπως βλέπουμε, μέσω της $\succ_{C_{16}}$, για τις πλειάδες $t_1,...,t_9$ του Σ ισχύει ότι:

a) $\forall i \in \{1,2,3,5,6,7,8,9\}$, $t_4 \succ_{C_{16}} t_i$,

b) $\forall j \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $t_9 \succ_{C_{16}} t_j$,

c) $\forall k \in \{1,2,3,4,6,7,8\}$, $t_5 \succ_{C_{16}} t_k$,

d) $\forall l \in \{1,2,3,4,6,8\}$, $t_7 \succ_{C_{16}} t_l$,

e) $\forall m \in \{1,3,5,7,8\}$, $t_2 \succ_{C_{16}} t_m$ και $t_6 \succ_{C_{16}} t_m$

f) $\forall n \in \{3,5,7,8\}$, $t_1 \succ_{C_{16}} t_n$, καθώς και

g) $\forall q \in \{3,7\}$, $t_8 \succ_{C_{16}} t_q$.

Απ' ότι παρατηρούμε από τις παραπάνω συσχετίσεις των πλειάδων, η $\succ_{C_{16}}$ δεν αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη, εφόσον σε πολλές περιπτώσεις παραβιάζει την ιδιότητα της μη-συμμετρικότητας. Π.χ., από τα a) και b)

προκύπτει ότι $t_4 \succ_{C_{16}} t_9$ και $t_9 \succ_{C_{16}} t_4$, καθώς και από τα c) και f) προκύπτει ότι $t_5 \succ_{C_{16}} t_1$ και $t_1 \succ_{C_{16}} t_5$. Επίσης, από το b) συμπεραίνουμε ότι η πλειάδα t_9 προηγείται μέσω της $\succ_{C_{16}}$ *όλων* των υπόλοιπων πλειάδων του Σ. Όμως, εφόσον από a) ισχύει ότι $t_4 \succ_{C_{16}} t_9$, τότε $\neg\exists t \in \Sigma$ τέτοια ώστε $\neg\exists t' \in \Sigma : t' \succ_{C_{16}} t$. Άρα, με βάση τον Ορισμό 4.9, η επερώτηση προτίμησης $\omega_{C_{16}}(\Sigma)$ επιστρέφει κενό αποτέλεσμα ($\omega_{C_{16}}(\Sigma)$=Ø). □

Το παραπάνω γεγονός συντελεί στη διαπίστωση ότι το αρκετά γενικευμένο πλαίσιο του Chomicki *δεν είναι πλήρως αποτελεσματικό* στην αντιμετώπιση του προβλήματος της κενής απάντησης, το οποίο και αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της έκφρασης προτιμήσεων πάνω στα υπάρχοντα μοντέλα δεδομένων[6]. Ωστόσο, με βάση τη δική μας θεώρηση των προτιμήσεων ως (αυστηρές) μερικές διατάξεις, για τον τελεστή διαλογής του Chomicki ισχύει το παρακάτω σημαντικό θεώρημα, το οποίο και αποδεικνύεται στο [7]:

Θεώρημα 4.2: *Αν μια σχέση προτίμησης $\succ_C$ πάνω σε ένα σχεσιακό πίνακα $R(A_1,...,A_n)$ αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη του $dom(A_1)\times\cdots\times dom(A_n)$, τότε, για κάθε πεπερασμένο και μη-κενό στιγμιότυπο r του R, το $\omega_C(r)$ δεν είναι κενό ($\omega_C(r) \neq \varnothing$).*□

Απ' ότι βλέπουμε, περιορίζοντας το πλαίσιο του Chomicki πάνω στο πεδίο των αυστηρών μερικών διατάξεων, το πρόβλημα της κενής απάντησης είναι επιλύσιμο.

4.1.1.3 Κατάταξη (Ranking) Πλειάδων

Η έννοια της *κατάταξης* (ranking) των πλειάδων σε ένα σχεσιακό πίνακα με βάση την ορισμένη σχέση προτίμησης σ' αυτόν, ενσωματώνεται

[6] Ο Chomicki στο [7] παρουσιάζει και έναν εναλλακτικό ορισμό του τελεστή διαλογής. Ωστόσο, για την αποφυγή του κενού αποτελέσματος, η εκάστοτε σχέση προτίμησης *πρέπει να είναι απαραιτήτως μεταβατική*, οπότε πάλι δεν καλύπτεται το σύνολο όλων των σχέσεων προτίμησης.

έμμεσα στο πλαίσιο του Chomicki με την χρήση της έννοιας της *επαναλαμβανόμενης προτίμησης* (iterated preference). Συγκεκριμένα, έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.10: *Αν* $R(A_1,...,A_n)$ *είναι ένας σχεσιακός πίνακας και* C *μια φόρμουλα προτίμησης που ορίζει μια σχέση προτίμησης* $\succ_C$ *στον* R*, τότε η* n*-οστή επανάληψη (iteration) του τελεστή διαλογής* $\omega_C(R)$ *για κάθε πεπερασμένο και μη κενό στιγμιότυπο* r *του* R *ορίζεται ως εξής:*

$$\omega_C^1(r) = \omega_C(r)\text{, και}$$

$$\omega_C^{n+1}(r) = \omega_C(r - \bigcup_{1\le i\le n}\omega_C^i(r)).\square$$

Απ' ότι παρατηρούμε, οι πλειάδες που θεωρούνται μέσω της $\succ_C$ καλύτερες, αμέσως επόμενες καλύτερες, και ούτω καθ' εξής, καθορίζονται με *επαναληπτική εφαρμογή* του τελεστή διαλογής πάνω στο εκάστοτε στιγμιότυπο του R, αφαιρώντας, όμως, κάθε φορά από το στιγμιότυπο αυτό τις πλειάδες που επιστρέφονται στις προηγούμενες εφαρμογές του τελεστή. Ο αριθμός των επαναλήψεων του τελεστή διαλογής, *υποδηλώνει και την κατάταξη των πλειάδων* που επιστρέφονται ως αποτέλεσμα, π.χ. η επερώτηση προτίμησης $\omega_C^2(r')$, όπου r' ένα στιγμιότυπο του R, επιστρέφει τις *δεύτερες* καλύτερες πλειάδες, μέσω της $\succ_C$*, του* r'.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη υπο-ενότητα, είναι δυνατό ο τελεστής διαλογής μιας σχέσης προτίμησης του πλαισίου του Chomicki να επιστρέφει το κενό σύνολο. Οπότε, μπορούν να υπάρξουν περιπτώσεις, στις οποίες οι πλειάδες του εκάστοτε στιγμιότυπου *δεν μπορούν να καταταχθούν με βάση τον Ορισμό 4.10*. Μια τέτοια περίπτωση εμφανίζεται στο Παράδειγμα 4.10. Εφόσον $\omega_{C_{16}}(\Sigma) = \emptyset$, μέσω του Ορισμού 4.10, για n *επαναλήψεις του τελεστή διαλογής* $\omega_{C_{16}}(PCGames)$ στο στιγμιότυπο Σ της Εικόνας 4.1 έχουμε $\omega_{C_{16}}^1(\Sigma) = \omega_{C_{16}}^2(\Sigma) = ... = \omega_{C_{16}}^n(\Sigma) = \emptyset$, πράγμα το οποίο δεν μας οδηγεί σε κατάταξη των πλειάδων $t_1,...,t_9$ του Σ. Ωστόσο, στην περίπτωση που η σχέση

προτίμησης αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη, ο Chomicki στο [7] παραθέτει και αποδεικνύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.3: *Αν μια σχέση προτίμησης* $\succ_C$ *πάνω σε ένα σχεσιακό πίνακα* $R(A_1,...,A_n)$ *αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη του* $dom(A_1)\times\cdots\times dom(A_n)$*, τότε, για κάθε πεπερασμένο, μη-κενό στιγμιότυπο* r *του* R *και για κάθε πλειάδα* $t\in r$*, υπάρχει ένα* i, όπου $i\geq 1$, τέτοιο ώστε $t\in\omega_C^i(r)$.□

Όπως βλέπουμε από το Θεώρημα 4.3, η κατάταξη των εκάστοτε πλειάδων μέσω μιας σχέσης προτίμησης που αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη ολοκληρώνεται κανονικά με βάση τον Ορισμό 4.10. Για να γίνει αυτό πιο σαφές, παραθέτουμε ένα ενδεικτικό παράδειγμα:

Παράδειγμα 4.11: Υποθέτουμε το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και την σχέση προτίμησης $\succ_{C_{10}}$ του Παραδείγματος 4.5 πάνω στον *PCGames*, η οποία, όπως είδαμε στο παράδειγμα αυτό, αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη του $N\times C\times Y\times P$. Για τα δύο πρώτα στάδια της επαναλαμβανόμενης προτίμησης μέσω του $\omega_{C_{10}}(PCGames)$ στο Σ, έχουμε $\omega_{C_{10}}^1(\Sigma)=\omega_{C_{10}}(\Sigma)=\{t_1,t_3,t_6,t_7,t_8\}$ και $\omega_{C_{10}}^2(\Sigma)=\omega_{C_{10}}(\Sigma-\omega_{C_{10}}^1(\Sigma))=\{t_2,t_4,t_5,t_9\}$, όπου τα αποτελέσματά τους ως επερωτήσεις προτίμησης εμφανίζονται στις Εικόνες 4.13 και 4.14 αντίστοιχα:

Name	Category	Year	Price-in-Euro
MonkeyIsland4	Adventure	2002	20.95
CM2004	Manager	2004	25.30
Indy	Action-Adventure	2000	16.55
TheSims2	Strategy	2004	39.00
TotalClubManager	Manager	2003	20.95

Εικόνα 4.13 - Το αποτέλεσμα της επερώτησης $\omega_{C_{10}}^1(\Sigma)$

Name	Category	Year	Price-in-Euro
FlightSim3	Simulation	2000	21.50
GK3	Adventure	1998	17.70
AgeOfEmpires2	Strategy	2003	30.00
RiseOfNations	Strategy	2000	21.50

Εικόνα 4.14 - Το αποτέλεσμα της επερώτησης $\omega^2_{C_{10}}(\Sigma)$

Απ' ότι παρατηρούμε, $\omega^1_{C_{10}}(\Sigma) \cup \omega^2_{C_{10}}(\Sigma) = \{t_1, ..., t_9\}$, άρα η κατάταξη των πλειάδων μέσω της $\succ_{C_{10}}$ ολοκληρώθηκε κανονικά (άλλωστε, *δεν είναι εφαρμόσιμη* περαιτέρω επανάληψη του τελεστή διαλογής, εφόσον, μετά τις αφαιρέσεις των $\omega^1_{C_{10}}(\Sigma)$ και $\omega^2_{C_{10}}(\Sigma)$, το Σ είναι, πλέον, κενό). □

4.1.1.4 Αδυναμίες της Προσέγγισης

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, το πλαίσιο του Chomicki, μέσω της χρήσης της λογικής πρώτης τάξης για τον ορισμό σχέσεων προτίμησης, αποτελεί ένα αρκετά γενικευμένο πλαίσιο, το οποίο και καλύπτει μια μεγάλη γκάμα από εκφράσεις προτιμήσεων πάνω στο σχεσιακό μοντέλο δεδομένων. Ωστόσο, εμφανίζει ένα σύνολο από αδυναμίες, οι οποίες και παρουσιάζονται παρακάτω:

a) Εξαιτίας της εκφραστικότητας που προσδίδει η λογική πρώτης τάξης, είναι δυνατό οι σχέσεις προτίμησης που ορίζονται στο πλαίσιο του Chomicki *να μη χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένες ιδιότητες,* κάνοντας έτσι τη διαδικασία του καθορισμού τους, αλλά και της μετέπειτα διάταξης των αντικειμένων *αρκετά δυσκίνητη*. Στο δικό μας πλαίσιο κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό να συμβεί, εφόσον κάθε προτίμηση ορίζεται εξ' αρχής με συγκεκριμένες ιδιότητες (π.χ., ανακλαστικότητα, μεταβατικότητα).
b) Με βάση την παραπάνω εκφραστικότητα, είναι δυνατό σχέσεις προτίμησης που ορίζονται μέσω των ειδών σύνθεσης του πλαισίου του Chomicki *να παραβιάζουν μια ή παραπάνω ιδιότητες* που χαρακτηρίζουν τις αντίστοιχες συνιστώσες σχέσεις προτίμησης, καθιστώντας έτσι τις συνθέσεις αυτές *αρκετά φορτικές* για την

περαιτέρω διαχείριση των προτιμήσεων του πλαισίου. Στη δική μας προσέγγιση, κάτι τέτοιο αποφεύγεται μέσω της χρήσης της διάταξης μέσω συντεταγμένων και της λεξικογραφικής διάταξης για τη σύνθεση προτιμήσεων, οι οποίες και *διατηρούν* τις ιδιότητες των συνιστωσών προτιμήσεων-μερικών διατάξεων.

c) Αν και καλύπτει μια μεγάλη γκάμα από εκφράσεις προτιμήσεων, το πλαίσιο του Chomicki επικεντρώνεται σε *συγκεκριμένους τύπους προτιμήσεων* και στηρίζεται σε *λεπτομερείς θεωρήσεις*, με αποτέλεσμα να χαρακτηρίζεται από αρκετούς *πλεονασμούς* πάνω στην αναπαράσταση των προτιμήσεων. Στο δικό μας πλαίσιο, τέτοιου είδους πλεονασμοί δεν παρατηρούνται, εφόσον μοντελοποιούμε τις προτιμήσεις αυτές καθαυτές που παρατηρούνται στην καθημερινή ζωή *χωρίς* τη χρήση περιττών υποθέσεων. Συγκεκριμένα, απλώς τις θεωρούμε ως μερικές διατάξεις συνόλων, οι οποίες και οδηγούν τελικώς σε προδιατάξεις (preorders) των διαθέσιμων αντικειμένων, καθώς, επίσης, και παρέχουμε μια απλή διαδικασία σύνθεσής τους.

d) Στη διαδικασία της τελικής ολικής διάταξης των αντικειμένων, *δεν* υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ των ενεργών και των μη-ενεργών στοιχείων, τα οποία και χαρακτηρίζονται από *διαφορετική* σημασιολογία για τη δηλωμένη προτίμηση του χρήστη. Επιπροσθέτως, διατάσσει ολικώς *μόνο* μέσω των μέγιστων στοιχείων, όπως ο αλγόριθμος *TOWMax*, όπου τα μη-ενεργά στοιχεία της διάταξης τα τοποθετεί στις *καλύτερες απαντήσεις*. Στη δική μας προσέγγιση, η διάκριση των στοιχείων της διάταξης σε ενεργά και μη-ενεργά στοιχεία παίζει *πρωτεύοντα* ρόλο για την ολική διάταξη των αντικειμένων, καθώς επίσης, είναι δυνατή η διάταξη *και μέσω των ελάχιστων στοιχείων* (αλγόριθμος *TOWMin*).

e) Το πλαίσιο του Chomicki *δεν παρέχει ρητό ορισμό της ισοδυναμίας μεταξύ δύο ή περισσότερων προτιμήσεων που εκφράζονται στις εκάστοτε πλειάδες ενός σχεσιακού πίνακα*. Όπως είδαμε προηγουμένως, η μόνη περίπτωση σύνθεσης δύο ή περισσότερων σχέσεων προτίμησης που θεωρεί ισοδύναμες τις σχέσεις αυτές είναι η *σύνθεση κατά Pareto*, στην οποία, *όμως*, οι παραπάνω

σχέσεις προτίμησης *δεν ορίζονται στον ίδιο σχεσιακό πίνακα, αλλά σε διαφορετικούς*. Στο δικό μας πλαίσιο, η ισοδυναμία μεταξύ των συνιστωσών (ατομικών) προτιμήσεων μιας σύνθετης προτίμησης εκφράζεται με την τοποθέτηση των αντίστοιχων συναρτήσεων στο *ίδιο σύνολο-στοιχείο* της ολικής διάταξης των εμπλεκόμενων συναρτήσεων μέσω του αλγόριθμου *FinTO*.

4.1.2 Πλαίσιο Προτιμήσεων κατά Kießling

Ο Kießling [19] βασίζει τον ορισμό των προτιμήσεων του χρήστη πάνω σε πεδία τιμών γνωρισμάτων (attribute domains) του σχεσιακού και του XML μοντέλου δεδομένων ως *αυστηρές μερικές διατάξεις*. Στο πλαίσιο αυτό, ο Kießling προτείνει κατάλληλες επεκτάσεις των δηλώσεων επερώτησης σε SQL και XPath, συγκεκριμένα την Preference-SQL [21] και Preference-XPath [20]. Το γεγονός αυτό, βασίζεται στην αντίληψη του Kießling ότι στην καθημερινή ζωή οι δηλώσεις προτιμήσεων αντιμετωπίζονται ως «ευχές» (wishes) που ως επί το πλείστον εκφράζονται με όρους του τύπου *«Προτιμώ το Α καλύτερα από το Β»*. Συγκεκριμένα, έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.11: *Δεδομένου ενός μη-κενού συνόλου* $A = \{A_1, ..., A_n\}$ *από ονόματα γνωρισμάτων, μια προτίμηση* $P = (A, <_P)$ *είναι μια αυστηρή μερική διάταξη του* $dom(A) = dom(\{A_1, ..., A_n\}) = dom(A_1) \times \cdots \times dom(A_n)$, *όπου* $<_P \subseteq dom(A) \times dom(A)$ *είναι η δυαδική σχέση που την αναπαριστά.*

Η έκφραση $x <_P y$, *όπου* $x, y \in dom(A)$, *μεταφράζεται: «Το* y *προτιμάται καλύτερα από το* x *σε σχέση με την* P *».*□

Απ' ότι παρατηρούμε, υπάρχουν δύο *κύριες* διαφορές όσον αφορά το γενικό ορισμό της προτίμησης στα πλαίσια του Kießling και του Chomicki (Ορισμός 4.1):

a) Στο πλαίσιο του Chomicki, η ορισμένη προτίμηση, μέσω της σχέσης προτίμησης που την αναπαριστά, εφαρμόζεται *απευθείας* πάνω στις πλειάδες που περιέχουν τα εκάστοτε στιγμιότυπα του σχεσιακού πίνακα, οι οποίες και *αποτελούν τα αντικείμενα προς*

διάταξη. Από την άλλη πλευρά, στο πλαίσιο του Kießling, η προτίμηση *δεν ορίζεται πάνω στα αντικείμενα προς διάταξη* (είτε αυτά είναι πλειάδες του στιγμιότυπου ενός σχεσιακού πίνακα, είτε στοιχεία (elements) του ίδιου τύπου σε ένα XML έγγραφο), αλλά σε σύνολα τιμών που *χαρακτηρίζουν τα αντικείμενα αυτά*, και μέσω της διάταξης των τιμών αυτών, διατάσσονται και τα αντικείμενα που αντιστοιχίζονται στις τιμές αυτές.

b) Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ο Chomicki *δεν αποδίδει εξ ορισμού κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες* στις προτιμήσεις που ορίζει, σε αντίθεση με τον Kießling, ο οποίος εφοδιάζει τις προτιμήσεις με τις ιδιότητες της αυστηρής μερικής διάταξης (Ορισμός 4.11).

Για μια ορισμένη προτίμηση $P = (A, <_P)$, ο Kießling προσδιορίζει το σύνολο των στοιχείων του $dom(A)$ που συσχετίζονται μέσω της αντίστοιχης αυστηρής μερικής διάταξης $<_P$, ως εξής:

Ορισμός 4.12: *Έστω προτίμηση* $P = (A, <_P)$. *Τότε, το σύνολο* $R = \{x \in dom(A) \mid \exists y \in dom(A) : (x <_P y) \vee (y <_P x)\}$ *αποτελεί το πεδίο (range) της* $<_P$, *το οποίο συμβολίζεται ως* $range(<_P)$.□

Δεδομένου ότι οι προτιμήσεις αποτελούν (αυστηρές) μερικές διατάξεις, ο Kießling ενσωματώνει στο πλαίσιό του ένα μεγάλο μέρος της *Θεωρίας Διατάξεων (Order Theory)* που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2, δημιουργώντας έτσι αντίστοιχους τύπους προτιμήσεων, αλλά και τρόπους σχηματικής αναπαράστασης των προτιμήσεων αυτών. Οι χαρακτηριστικότεροι των ορισμών αυτών, δίνονται παρακάτω:

Ορισμός 4.13: *Έστω η προτίμηση* $P = (A, <_P)$. *Τότε, η* P *είναι μια αλυσίδα προτιμήσεων (chain preference), αν* $\forall x, y \in dom(A)$ *με* $x \neq y$, *ισχύει ότι* $x <_P y$ *ή* $y <_P x$.□

Ορισμός 4.14: *Έστω η προτίμηση* $P = (A, <_P)$. *Τότε, η* P *είναι μια αντι-αλυσίδα προτιμήσεων (anti-chain preference) και συμβολίζεται ως* $A^{\leftrightarrow}$, *άνν*

$<_P = \varnothing$, δηλαδή άνν $\forall x, y \in dom(A)$ με $x \neq y$, ισχύει ότι $x \not<_P y$ και $y \not<_P x$ (τα x και y δεν διατάσσονται μέσω της P).□

Ορισμός 4.15: *Έστω η προτίμηση $P = (A, <_P)$, όπου το σύνολο $dom(A)$ είναι πεπερασμένο. Ένας κατευθυνόμενος μη-κυκλικός γράφος (directed acyclic graph) $G_P = (V_P, E_P)$, για τον οποίο:*

a) Κάθε στοιχείο του $dom(A)$ αποτελεί κόμβο που ανήκει στο V_P

b) $\forall v, v' \in V_P$, υπάρχει ακμή $e \in E_P$ με κόμβο αφετηρίας το v' και κόμβο προορισμού το v, άνν $v <_P v'$ και $\neg \exists a \in V_P$, τέτοιο ώστε $v <_P a <_P v'$,

αποτελεί τον «καλύτερο-από» (better-than) γράφο της P.□

Απ' ότι παρατηρούμε, ο «καλύτερο-από» γράφος μιας προτίμησης P ισοδυναμεί πλήρως με το Hasse διάγραμμα (Ορισμός 2.5) του συνόλου στο οποίο εκφράζεται.

Δοθέντος του «καλύτερο-από» γράφου G_P για μια προτίμηση $P = (A, <_P)$, ο Kießling ορίζει μια σειρά από ιδιότητες στα στοιχεία-κόμβους του G_P. Συγκεκριμένα:

a) $\forall x, y \in V_P$, $x <_P y$ αν το y *προηγείται* του x στο G_P, δηλαδή αν υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι από το y στο x στον γράφο αυτό.

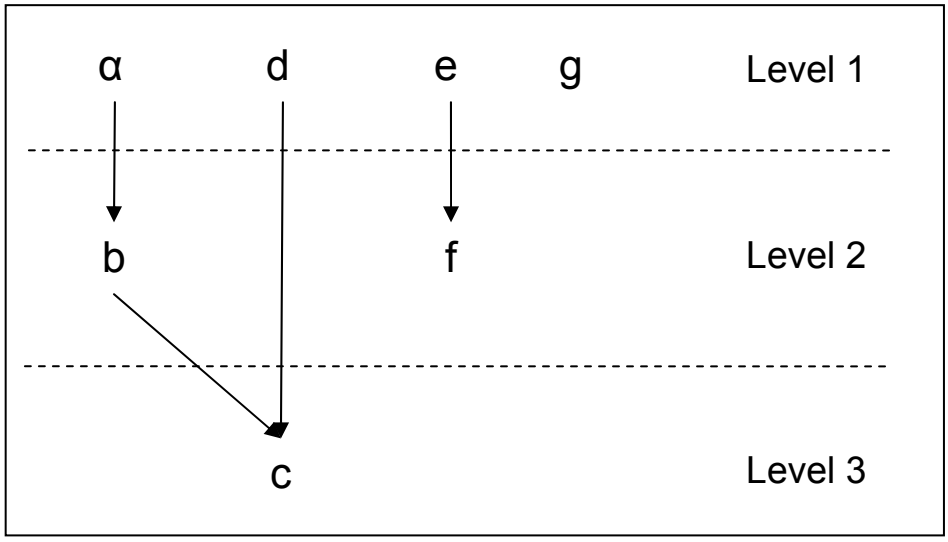
b) Στοιχεία-κόμβοι στο G_P για τα οποία *δεν υπάρχουν στοιχεία που προηγούνται*, αποτελούν τα *μέγιστα στοιχεία (maximal elements)* της P, τα οποία βρίσκονται στο *επίπεδο (Level) 1* και των οποίων το σύνολο συμβολίζεται ως $\max(P)$. Απ' ότι παρατηρούμε, η ιδιότητα αυτή είναι σε πλήρη αντιστοιχία με τον Ορισμό 2.6 των μέγιστων στοιχείων ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου.

c) Το στοιχείο $x \in V_P$ βρίσκεται στο επίπεδο j, αν το μεγαλύτερο κατευθυνόμενο μονοπάτι στο G_P από ένα μέγιστο στοιχείο στο x έχει $j-1$ ακμές.

d) $\forall x, y \in V_P$, αν δεν υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι μεταξύ του x και του y στο G_P, τότε τα x και y *είναι μη-διατασσόμενα ως προς την* P, δηλαδή $x \not<_P y$ και $y \not<_P x$.

Για να γίνει πιο ξεκάθαρη η σχεδιαστική ομοιότητα του «καλύτερο-από» γράφου με το διάγραμμα Hasse της Θεωρίας Διατάξεων, αλλά και πιο σαφείς οι ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τα στοιχεία του, παρακάτω παραθέτουμε ένα ενδεικτικό παράδειγμα:

Παράδειγμα 4.12: Έστω γνώρισμα G με $dom(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ και μια προτίμηση $P_1 = (G, <_{P_1})$ τέτοια ώστε $f <_{P_1} e$, $c <_{P_1} d$, $c <_{P_1} b$ και $b <_{P_1} a$ (από τις δύο τελευταίες συσχετίσεις συνεπάγεται κι ότι $c <_{P_1} a$). Ο «καλύτερο-από» γράφος της P παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.15, όπου τα στοιχεία του $dom(G)$ διαχωρίζονται μέσω των επιπέδων στα οποία βρίσκονται. Απ' ότι παρατηρούμε, $\max(P) = \{a, d, e, g\}$.□

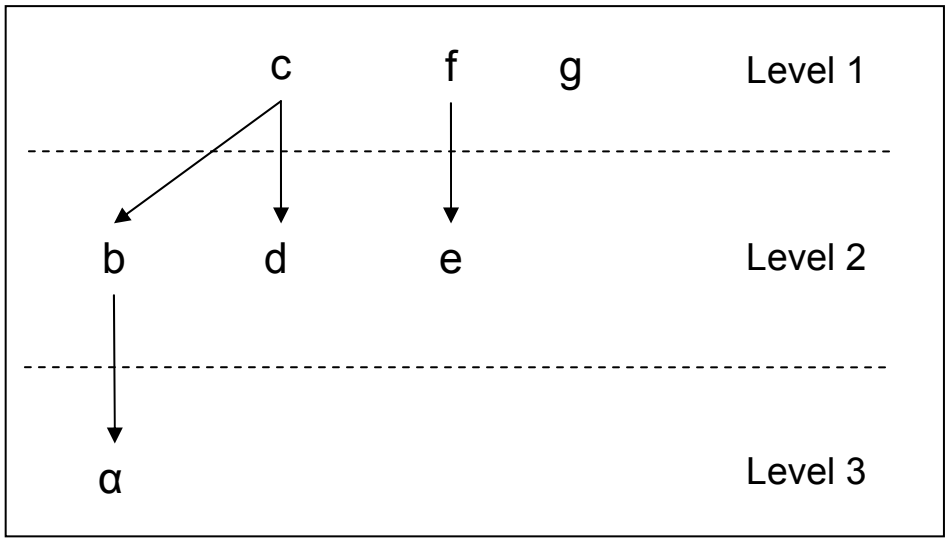


Εικόνα 4.15 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_1 = (G, <_{P_1})$

Ορισμός 4.16: *Έστω προτίμηση* $P = (A, <_P)$. *Τότε, η προτίμηση* $P^\delta = (A, <_{P^\delta})$, *για την οποία* $\forall x, y \in dom(A)$ *με* $x \neq y$, $x <_{P^\delta} y$ *άνν* $y <_P x$, *αποτελεί την δυϊκή προτίμηση (dual preference) της* P.□

Σε περιπτώσεις που το $dom(A)$ είναι πεπερασμένο, ο «καλύτερο-από» γράφος της P^{δ} προκύπτει με μια απλή αλλαγή της φοράς των ακμών του αντίστοιχου γράφου της P:

Παράδειγμα 4.13: Ανακαλούμε την προτίμηση $P_1 = (G, <_{P_1})$ του Παραδείγματος 4.12 και έστω $P_1^{\delta} = (G, <_{P_1^{\delta}})$ η δυϊκή προτίμηση της P_1. Η Εικόνα 4.16 παρουσιάζει τον «καλύτερο-από» γράφο της P_1^{δ}, όπου η αντιστροφή των ακμών σε σχέση με τον αντίστοιχο γράφο της P_1 είναι προφανής. □



Εικόνα 4.16 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_1^{\delta} = (G, <_{P_1^{\delta}})$

Ορισμός 4.17: *Δεδομένης μιας προτίμησης $P = (A, <_P)$, κάθε σύνολο $S \subseteq dom(A)$ επιφέρει μια προτίμηση $P^{\subseteq} = (S, <_{P^{\subseteq}})$ που αποτελεί προτίμηση-υποσύνολο (subset preference) της P, αν $\forall x, y \in S$ με $x \neq y$, $x <_{P^{\subseteq}} y$ άνν $x <_P y$.* □

Απ' ότι βλέπουμε, ο Ορισμός 4.17 απορρέει άμεσα από το Λήμμα 2.7. Απλώς ο Kießling προσδιορίζει την αυστηρή μερική διάταξη σε κάθε υποσύνολο ενός αυστηρά μερικώς διατεταγμένου συνόλου, μέσω του ορισμού μιας νέας

προτίμησης (η οποία, όπως είδαμε στον Ορισμό 4.11, αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη) στο υποσύνολο αυτό.

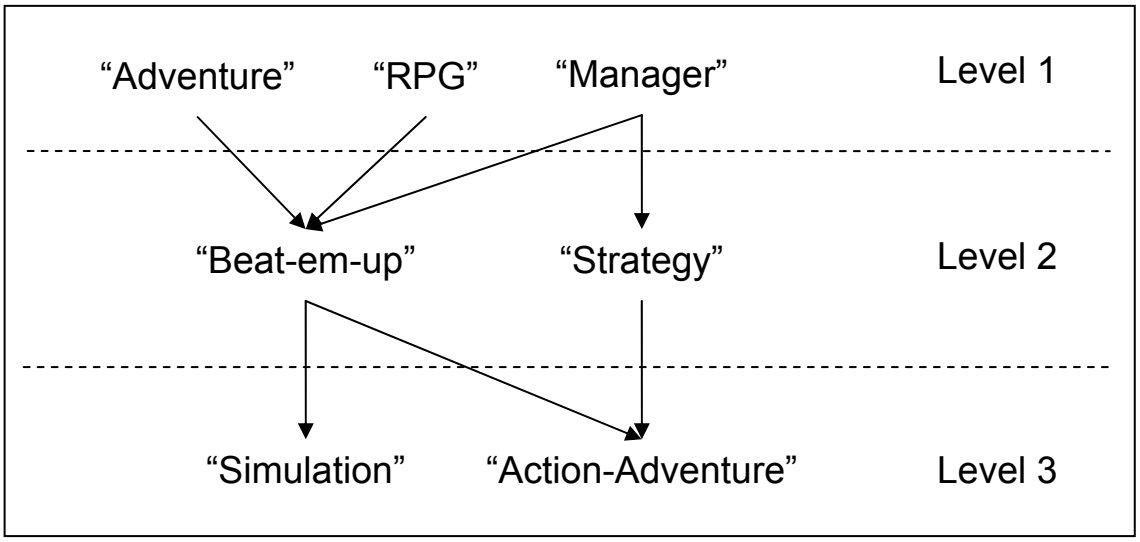
Η σημαντικότερη εφαρμογή της έννοιας της προτίμησης-υποσυνόλου στο πλαίσιο του Kießling είναι για την *αντιστοίχηση του επονομαζόμενου από τον Kießling «κόσμου των ευχών» ("realm of wishes") που αντιπροσωπεύουν οι ορισμένες προτιμήσεις σε σύνολα ονομάτων γνωρισμάτων, πάνω στον «πραγματικό κόσμο» ("real world") που αντιπροσωπεύουν τα εκάστοτε στιγμιότυπα σχεσιακών πινάκων ή στοιχεία XML εγγράφων, τα οποία και χαρακτηρίζονται από τα γνωρίσματα αυτά*. Για την ενιαία αντιμετώπιση των παραπάνω δύο δομών πληροφορίας, ο Kießling τις χαρακτηρίζει ως «σύνολα βάσης δεδομένων» ("database sets"):

Ορισμός 4.18: *Έστω ένα σύνολο βάσης δεδομένων* $DBset(B_1,...B_m)$*, όπου* $B_1,...B_m$ *τα γνωρίσματα που τη χαρακτηρίζουν. Δεδομένου ενός συνόλου* $A = \{A_1,..., A_n\}$ *ονομάτων γνωρισμάτων, όπου κάθε* A_j *αντιστοιχεί σε ένα ξεχωριστό γνώρισμα* B_i *του* $DBset$*, έστω* $DBset[A] := DBset[A_1,..., A_n]$ *η προβολή του* $DBset$ *πάνω σ' αυτά τα* n *γνωρίσματα. Αν υπάρχει προτίμηση* $P = (A, <_P)$*, τότε το* $DBset[A] \subseteq dom(A)$ *ορίζει μια προτίμηση-υποσύνολο της* P *η οποία ονομάζεται προτίμηση βάσης δεδομένων (database preference) και δηλώνεται ως* $P^{DBset} = (DBset[A], <_P)$*.*□

Απ' ότι παρατηρούμε, η P^{DBset} ουσιαστικά αποτελεί το *πέρασμα της* P *από τις τιμές των γνωρισμάτων στα εκάστοτε αντικείμενα που χαρακτηρίζονται από τα γνωρίσματα αυτά*, η οποία και εμφανίζει πολλές ομοιότητες με τη διαδικασία διάταξης των αντικειμένων μέσω προτιμήσεων του δικού μας θεωρητικού πλαισίου (Ενότητα 3.2). Για να γίνει αυτό πιο σαφές, παραθέτουμε ένα ενδεικτικό παράδειγμα:

Παράδειγμα 4.14: Έστω Σ το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω μια προτίμηση $P_2 = (Category, <_{P_2})$, τέτοια ώστε *"Beat-em-up"* $<_{P_2}$ *"Adventure"*, *"Beat-em-up"* $<_{P_2}$ *"RPG"*, *"Beat-em-up"* $<_{P_2}$ *"Manager"*, *"Strategy"* $<_{P_2}$ *"Manager"*,

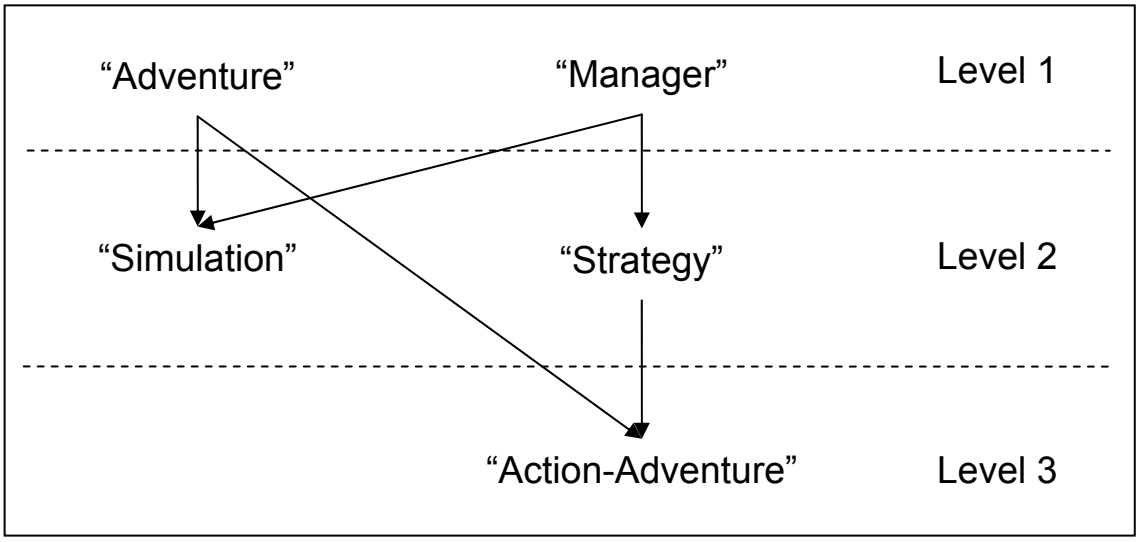
"Simulation" $<_{P_2}$ *"Beat-em-up"*, *"Action-Adventure"* $<_{P_2}$ *"Beat-em-up"* και *"Action-Adventure"* $<_{P_2}$ *"Strategy"* (από τις παραπάνω συσχετίσεις και μέσω της μεταβατικότητας της $<_{P_2}$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει επίσης *"Simulation"* $<_{P_2}$ *"Adventure"*, *"Simulation"* $<_{P_2}$ *"RPG"*, *"Simulation"* $<_{P_2}$ *"Manager"*, *"Action-Adventure"* $<_{P_2}$ *"Adventure"*, *"Action-Adventure"* $<_{P_2}$ *"RPG"* και *"Action-Adventure"* $<_{P_2}$ *"Manager"*). Εφόσον το *dom(Category) = C* είναι πεπερασμένο, για την καλύτερη κατανόηση της διάταξης του C με βάση την προτίμηση P_2, η Εικόνα 4.17 παρουσιάζει τον «καλύτερο-από» γράφο της $P_2 = (Category, <_{P_2})$:



Εικόνα 4.17 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_2 = (Category, <_{P_2})$

Το στιγμιότυπο Σ αποτελεί ένα «σύνολο βάσης δεδομένων» που χαρακτηρίζεται από το γνώρισμα *Category*, οπότε με βάση τον Ορισμό 4.18, η P_2 αντιστοιχείται στην προτίμηση βάσης δεδομένων $P_2^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_2})$, όπου $\Sigma[Category]$ η προβολή του Σ πάνω στο γνώρισμα *Category* ($\Sigma[Category]$ = *{"Adventure", "Action-Adventure", "Manager", "Strategy", "Simulation"}* $\subset C$). Η Εικόνα 4.18 παρουσιάζει τον «καλύτερο-από» γράφο της $P_2^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_2})$, ο οποίος μπορούμε να πούμε ότι διατάσσει *έμμεσα* τις πλειάδες του Σ, εφόσον διατάσσει τις αντίστοιχες τιμές τους στο γνώρισμα *Category* (καθότι $t_1[Category]$ = $t_4[Category]$ = *"Adventure"*, $t_3[Category]$ =

$t_8[Category]$ = *"Manager"*, $t_2[Category]$ = *"Simulation"*, $t_5[Category]$ = $t_7[Category]$ = $t_9[Category]$ = *"Strategy"* και $t_6[Category]$ = *"Action-Adventure"*).□



Εικόνα 4.18 - Ο "καλύτερος-από" γράφος της $P_2^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_2})$

4.1.2.1 Κατασκευές Προτιμήσεων

Λόγω της μεγάλης ποικιλομορφίας που παρατηρείται στις δηλώσεις προτιμήσεων πάνω σε ενέργειες και επιλογές της καθημερινής ζωής, το πλαίσιο του Kießling θεσπίζει, εκτός από τους παραπάνω τύπους προτιμήσεων με βάση τη Θεωρία Διατάξεων, και έναν αριθμό από *κατασκευαστές προτίμησης*, οι οποίοι και ορίζουν προτιμήσεις με την αντίστοιχη σημασιολογία. Οι κατασκευαστές αυτοί διαχωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες, ανάλογα με τη φύση των προτιμήσεων που δημιουργούν:

1. *Κατασκευαστές Βασικών Προτιμήσεων (Base Preference Constructors):* Οι κατασκευαστές αυτοί εκφράζουν προτιμήσεις πάνω σε *ένα συγκεκριμένο σύνολο* από ονόματα γνωρισμάτων, οι οποίες και ονομάζονται *βασικές προτιμήσεις (base preferences)*. Τυπικά, κάθε τέτοιος κατασκευαστής μιας βασικής προτίμησης $P = (A, <_P)$ περιέχει ένα ή περισσότερα *ορίσματα*, από τα οποία το

πρώτο χαρακτηρίζει το σύνολο A και τα υπόλοιπα την αυστηρή μερική διάταξη $<_P$ πάνω στο $dom(A)$.

2. *Κατασκευαστές Σύνθετων Προτιμήσεων (Complex Preference Constructors):* Οι κατασκευαστές αυτοί εκφράζουν προτιμήσεις που προκύπτουν από τη *σύνθεση* δύο προτιμήσεων, οι οποίες και ονομάζονται *σύνθετες προτιμήσεις*. Στο πλαίσιο του Kießling διακρίνονται δύο κατηγορίες σύνθεσης προτιμήσεων: η *συσσώρευση προτιμήσεων (preference accumulation)* και η *συνάθροιση προτιμήσεων (preference aggregation)*, των οποίων η κύρια διαφορά έγκειται στον τρόπο δημιουργίας της σύνθετης προτίμησης. Στη συσσώρευση προτιμήσεων, οι αντίστοιχοι κατασκευαστές *συνδυάζουν (combine)* τις συνιστώσες προτιμήσεις που ορίζονται πάνω σε σύνολα ονομάτων γνωρισμάτων, ενώ στη συνάθροιση προτιμήσεων, οι αντίστοιχοι κατασκευαστές *συναρμολογούν (assemble)* τη σύνθετη προτίμηση από τις επιμέρους συνιστώσες προτιμήσεις.

Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζουμε αναλυτικά τα είδη των βασικών και σύνθετων προτιμήσεων που προσδιορίζονται στο πλαίσιο του Kießling, παραθέτοντας τους αντίστοιχους ορισμούς τους με βάση τους κατασκευαστές τους, καθώς και ενδεικτικά παραδείγματα.

4.1.2.1.1 Βασικές Προτιμήσεις

Στην κατηγορία αυτή, ο Kießling προτείνει ένα σύνολο από προτιμήσεις, τις οποίες και διαχωρίζει σε δύο κύριες υποκατηγορίες:

a) Στις προτιμήσεις που εκφράζονται *μόνο πάνω σε σύνολα τιμών που ανήκουν σε αριθμητικούς τύπους δεδομένων* (όπως είναι οι ακέραιοι ή οι δεκαδικοί αριθμοί, οι ημερομηνίες σε ISO πρότυπο κ.τ.λ.), και
b) Στις προτιμήσεις που μπορούν να εκφραστούν γενικά, *ανεξάρτητα* από τον τύπο δεδομένων που ανήκουν τα εκάστοτε σύνολα τιμών.

Με βάση την παραπάνω διαφοροποίηση, ο Kießling χαρακτηρίζει τις προτιμήσεις της πρώτης υποκατηγορίας ως *βασικές αριθμητικές προτιμήσεις (numerical base preferences)* και τις αντίστοιχες της δεύτερης ως *βασικές μη-*

αριθμητικές προτιμήσεις (non-numerical base preferences). Ένας εξίσου σημαντικός λόγος για αυτή τη διάκριση των προτιμήσεων, έγκειται στο γεγονός ότι, όπως θα δούμε στη συνέχεια, *στις αριθμητικές βασικές προτιμήσεις χρησιμοποιούνται επιπρόσθετες δομές για τη διάταξη των στοιχείων, σε σχέση με τις μη-αριθμητικές*. Παρακάτω, επισημαίνουμε τα είδη των βασικών προτιμήσεων που ανήκουν στις δύο αυτές υποκατηγορίες, ξεκινώντας από τις μη-αριθμητικές.

4.1.2.1.1.1 Βασικές Μη-Αριθμητικές Προτιμήσεις

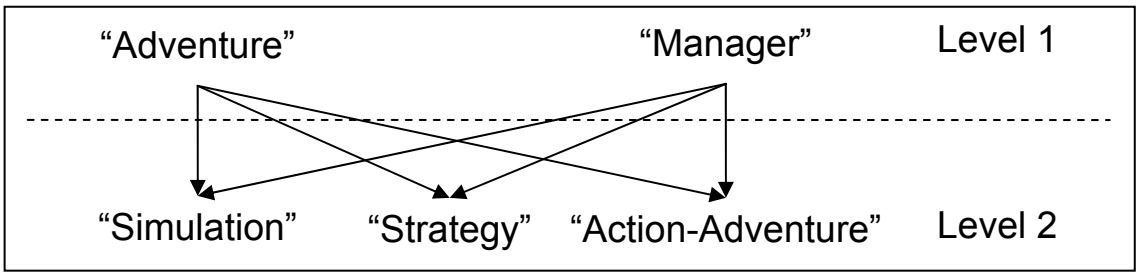
Στην υποκατηγορία αυτή, ο Kießling ορίζει 5 είδη προτιμήσεων: την POS *προτίμηση*, την NEG *προτίμηση*, την POS/NEG *προτίμηση*, την POS/POS *προτίμηση* και την $EXPLICIT$ *προτίμηση*.

Ορισμός 4.19: *Έστω A ένα μη-κενό σύνολο από ονόματα γνωρισμάτων. Μια προτίμηση $P=(A,<_P)$ είναι μια POS προτίμηση πάνω στο A ($P:=POS(A,POSset)$, όπου $POS(A,POSset)$ ο κατασκευαστής της POS προτίμησης με $POSset \subseteq dom(A)$), αν $\forall x,y \in dom(A)$ με $x \neq y$, $x <_P y$ άνν $y \in POSset$ και $x \notin POSset$.*□

Διαισθητικά, η POS προτίμηση καθορίζει, μέσω του $POSset$, ένα σύνολο από τιμές του $dom(A)$ οι οποίες θεωρούνται *προτιμότερες* σε σχέση με κάθε τιμή του $dom(A)$ που δεν ανήκει στο $POSset$.

Παράδειγμα 4.15: Έστω Σ το στιγμιότυπο του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω μια POS προτίμηση $P_3 := POS(Category,\{"Manager","Adventure"\})$. Αυτό σημαίνει ότι μέσω της $P_3=(Category,<_{P_3})$ κάθε τιμή από τις *"Manager"* και *"Adventure"* προηγείται κάθε μιας από τις εναπομείναντες τιμές του *dom(Category)*. Όπως συζητήθηκε προηγουμένως, η αντιστοίχηση της P_3 πάνω στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα (μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_3^{\Sigma}=(\Sigma[Category],<_{P_3})$ πάνω στο $\Sigma[Category]$ = *{"Adventure", "Action-*

Adventure", "Manager", "Strategy", "Simulation"}, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.19. □

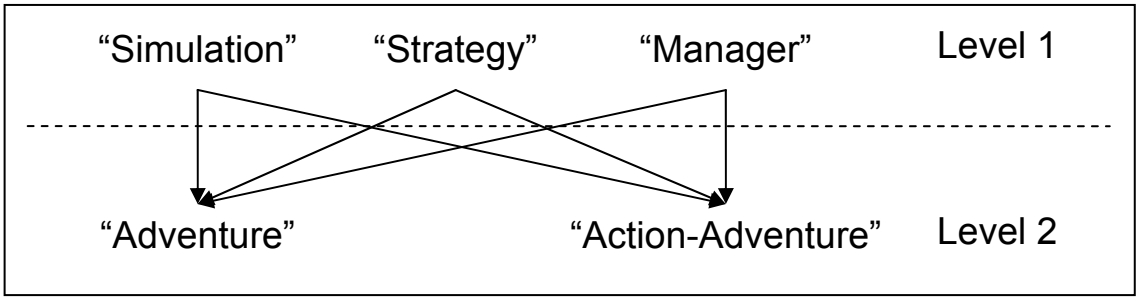


Εικόνα 4.19 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_3^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_3})$

Ορισμός 4.20: *Έστω* A *ένα μη-κενό σύνολο από ονόματα γνωρισμάτων. Μια προτίμηση* $P = (A, <_P)$ *είναι μια* NEG *προτίμηση πάνω στο* A *(*$P := NEG(A, NEGset)$*, όπου* $NEG(A, NEGset)$ *ο κατασκευαστής της* NEG *προτίμησης με* $NEGset \subseteq dom(A)$*), αν* $\forall x, y \in dom(A)$ *με* $x \neq y$, $x <_P y$ *άνν* $y \notin NEGset$ *και* $x \in NEGset$.□

Διαισθητικά, η NEG προτίμηση έχει ακριβώς αντίθετη σημασιολογία σε σχέση με την POS προτίμηση, καθώς καθορίζει, μέσω του $NEGset$, ένα σύνολο από τιμές του $dom(A)$ οι οποίες θεωρούνται *λιγότερο ενδιαφέρουσες* σε σχέση με κάθε τιμή του $dom(A)$ που δεν ανήκει στο $NEGset$.

Παράδειγμα 4.16: Έστω πάλι το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω μια NEG προτίμηση $P_4 := NEG(Category, \{"Action-Adventure", "Adventure"\})$. Αυτό σημαίνει ότι μέσω της $P_4 = (Category, <_{P_4})$ κάθε τιμή από τις *"Action-Adventure"* και *"Adventure"* υπολείπεται κάθε μιας από τις εναπομείναντες τιμές του *dom(Category)*. Η αντιστοίχηση της P_4 πάνω στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα (μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_4^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_4})$ πάνω στο $\Sigma[Category]$ = *{"Adventure", "Action-Adventure", "Manager", "Strategy", "Simulation"}*, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.20. □

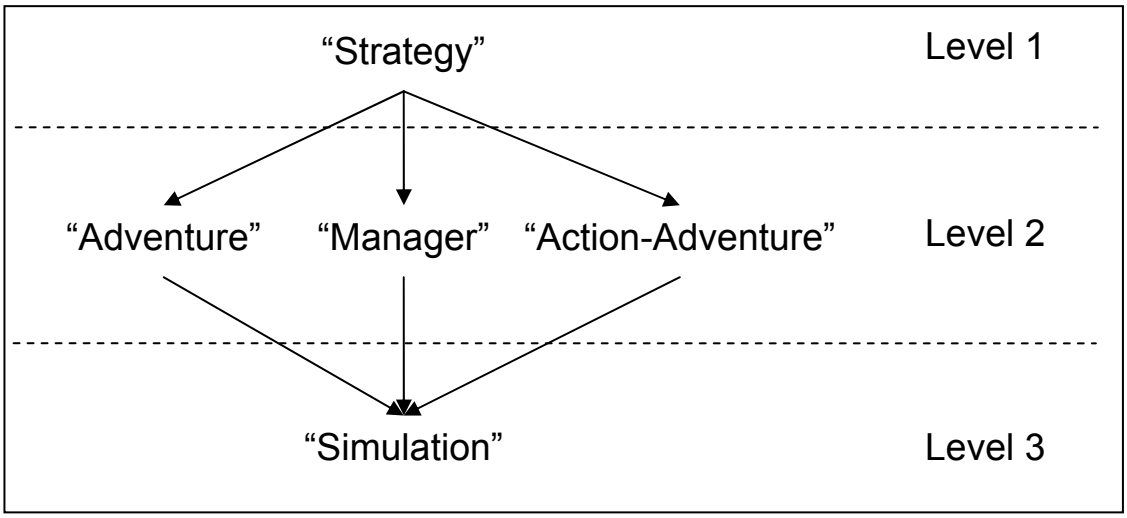


Εικόνα 4.20 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_4^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_4})$

Ορισμός 4.21: *Έστω* A *ένα μη-κενό σύνολο από ονόματα γνωρισμάτων. Μια προτίμηση* $P = (A, <_P)$ *είναι μια* POS/NEG *προτίμηση πάνω στο* A *(*$P := POS/NEG(A, POSset; NEGset)$*, όπου* $POS/NEG(A, POSset; NEGset)$ *ο κατασκευαστής της* POS/NEG *προτίμησης με* $POSset \subseteq dom(A)$*,* $NEGset \subseteq dom(A)$ *και* $POSset \cap NEGset = \emptyset$*), αν* $\forall x, y \in dom(A)$ *με* $x \neq y$*,* $x <_P y$ *άνν (*$x \in NEGset$ *και* $y \notin NEGset$*) ή (*$x \notin NEGset$ *και* $x \notin POSset$ *και* $y \in POSset$*).*□

Απ' ότι βλέπουμε, η POS/NEG προτίμηση αποτελεί ένα συνδυασμό μιας POS και μιας NEG προτίμησης στο ίδιο σύνολο ονομάτων γνωρισμάτων A, στον οποίο, όμως, δεν υπάρχει σύγκρουση (conflict) μεταξύ τους ($POSset \cap NEGset = \emptyset$).

Παράδειγμα 4.17: Έστω πάλι το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω μια POS/NEG προτίμηση $P_5 := POS/NEG(Category, \{"Strategy"\}; \{"Simulation"\})$. Αυτό σημαίνει ότι μέσω της $P_5 = (Category, <_{P_5})$ η τιμή *"Strategy"* προηγείται κάθε άλλης τιμής του *dom(Category)* (συμπεριλαμβανομένης και της τιμής *"Simulation"*), καθώς και η τιμή *"Simulation"* υπολείπεται κάθε άλλης τιμής του *dom(Category)* (συμπεριλαμβανομένης και της τιμής *"Strategy"*). Η αντιστοίχηση της P_5 πάνω στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα (μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_5^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_5})$ πάνω στο $\Sigma[Category]$ = *{"Adventure", "Action-Adventure", "Manager", "Strategy", "Simulation"}*, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.21. □



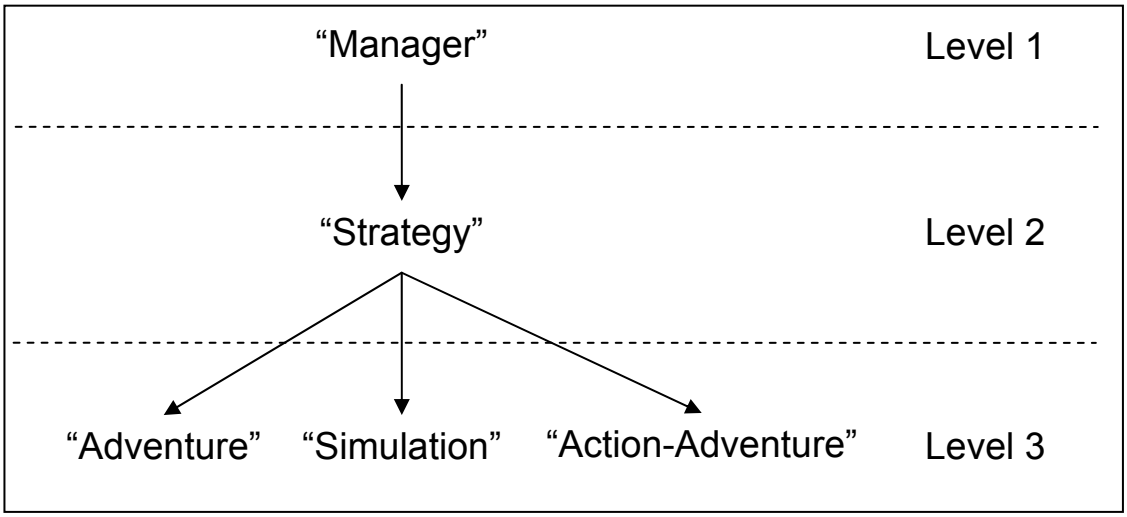
Εικόνα 4.21 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_5^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_5})$

Ορισμός 4.22: *Έστω* A *ένα μη-κενό σύνολο από ονόματα γνωρισμάτων. Μια προτίμηση* $P = (A, <_P)$ *είναι μια* POS/POS *προτίμηση πάνω στο* A *(*$P := POS/POS(A, POS1set; POS2set)$*, όπου* $POS/POS(A, POS1set; POS2set)$ *ο κατασκευαστής της* POS/POS *προτίμησης με* $POS1set \subseteq dom(A)$*,* $POS2set \subseteq dom(A)$ *και* $POS1set \cap POS2set = \emptyset$*), αν* $\forall x, y \in dom(A)$ *με* $x \neq y$*,* $x <_P y$ *άνν (*$x \in POS2set$ *και* $y \in POS1set$*) ή (*$x \notin POS1set$ *και* $x \notin POS2set$ *και* $y \in POS2set$*) ή (*$x \notin POS1set$ *και* $x \notin POS2set$ *και* $y \in POS1set$*).*□

Σημασιολογικά, η POS/POS προτίμηση καθορίζει ένα σύνολο από επιθυμητές τιμές, καθώς και ένα σύνολο από *εναλλακτικές* τιμές στο $dom(A)$, σε περίπτωση που όλες οι παραπάνω επιθυμητές τιμές δεν είναι διαθέσιμες.

Παράδειγμα 4.18: Έστω πάλι το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω μια POS/POS προτίμηση $P_6 := POS/POS(Category, \{"Manager"\}; \{"Strategy"\})$. Αυτό σημαίνει ότι μέσω της $P_6 = (Category, <_{P_6})$ η τιμή *"Manager"* προηγείται κάθε άλλης τιμής του *dom(Category)* (συμπεριλαμβανομένης και της τιμής *"Strategy"*), καθώς και η τιμή *"Strategy"* προηγείται κάθε άλλης τιμής του *dom(Category)*, εκτός από την τιμή *"Manager"*. Η αντιστοίχηση της P_6 πάνω

στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα (μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_6^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_6})$ πάνω στο $\Sigma[Category]$ = *{"Adventure", "Action-Adventure", "Manager", "Strategy", "Simulation"}*, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.22. □



Εικόνα 4.22 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_6^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_6})$

Ορισμός 4.23: *Έστω* A *ένα μη-κενό σύνολο από ονόματα γνωρισμάτων. Επίσης, έστω* $E - graph = \{(val_1, val_2), ...\}$ *ένας πεπερασμένος, μη-κυκλικός «καλύτερο-από» γράφος,* $V \subseteq dom(A)$ *το σύνολο όλων των* val_i *που υπάρχουν στον* $E - graph$ *και* $E = (V, <_E)$ *η παραγόμενη αυστηρή μερική διάταξη πάνω στο* V*, για την οποία ισχύει ότι:*

a) Αν $(val_i, val_j) \in E - graph$*, τότε* $val_i <_E val_j$

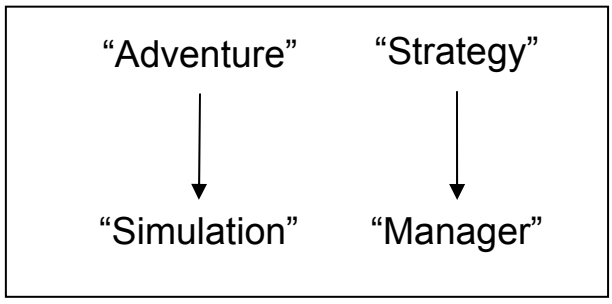
b) Αν $val_i <_E val_j$ *και* $val_j <_E val_k$*, τότε* $val_i <_E val_k$

Μια προτίμηση $P = (A, <_P)$ *είναι μια* $EXPLICIT$ *προτίμηση πάνω στο* A *μέσω του* $E - graph$ *(*$P := EXP(A, E - graph)$*, όπου* $EXP(A, E - graph)$ *ο κατασκευαστής της* $EXPLICIT$ *προτίμησης), αν* $\forall x, y \in dom(A)$ *με* $x \neq y$*,* $x <_P y$ *άνν* $x <_E y$ *ή (*$x \notin range(<_E)$ *και* $y \in range(<_E)$*).*□

Απ' ότι βλέπουμε, στο πλαίσιο του Kießling η έννοια της ρητής (explicit) δήλωσης προτίμησης προσδίδεται μέσω ενός «καλύτερο-από» γράφου

$E-graph$ που αναπαριστά τις συσχετίσεις που έχει δηλώσει ρητά ο χρήστης μεταξύ των τιμών του $dom(A)$ που τον ενδιαφέρουν. Ο $E-graph$ καθορίζει τα πρώτα επίπεδα του «καλύτερο-από» γράφου της προτίμησης αυτής καθαυτής, και τα στοιχεία του $dom(A)$ που δεν υπάρχουν στο γράφο αυτό τοποθετούνται στο τελευταίο επίπεδο.

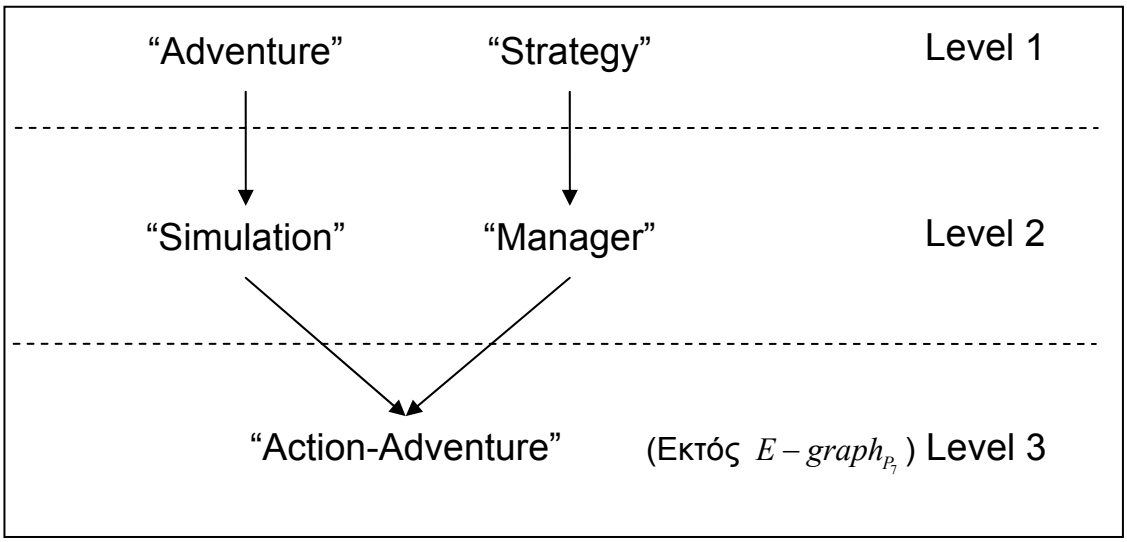
Παράδειγμα 4.19: Έστω πάλι το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω $P_7 := EXP(Category, \{("Manager","Strategy"),("Simulation","Adventure")\})$ μια *EXPLICIT* προτίμηση πάνω στο γνώρισμα *Category*. Η Εικόνα 4.23 παρουσιάζει τον γράφο $E-graph_{P_7} = \{("Manager","Strategy"),("Simulation","Adventure")\}$, ο οποίος και αποτελεί τον «καλύτερο-από» γράφο που αναπαριστά τη ρητή δήλωση προτίμησης του χρήστη στις τιμές *"Strategy"* και *"Adventure"* σε σχέση με τις τιμές *"Manager"* και *"Simulation"* αντίστοιχα.



Εικόνα 4.23 - Ο "καλύτερο-από" γράφος $E-graph_{P_7}$

Έχοντας περιορίσει ο χρήστης το ενδιαφέρον του πάνω στις τέσσερις παραπάνω τιμές, οι υπόλοιπες τιμές του $dom(Category)$ *"RPG"*, *"Beat-em-up"* και *"Action-Adventure"*, οι οποίες και δεν περιέχονται στον $E-graph_{P_7}$, θεωρούνται ως οι λιγότερο ενδιαφέρουσες σε σχέση με την $P_7 = (Category, <_{P_7})$ (δηλαδή, έχουμε διαισθητικά μια *NEG* προτίμηση πάνω σ' αυτές). Η αντιστοίχηση της P_7 πάνω στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα (μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_7^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_7})$ πάνω στο $\Sigma[Category] =$

{"Adventure", "Action-Adventure", "Manager", "Strategy", "Simulation"}, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.24. □



Εικόνα 4.24 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_7^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_7})$

4.1.2.1.1.2 Βασικές Αριθμητικές Προτιμήσεις

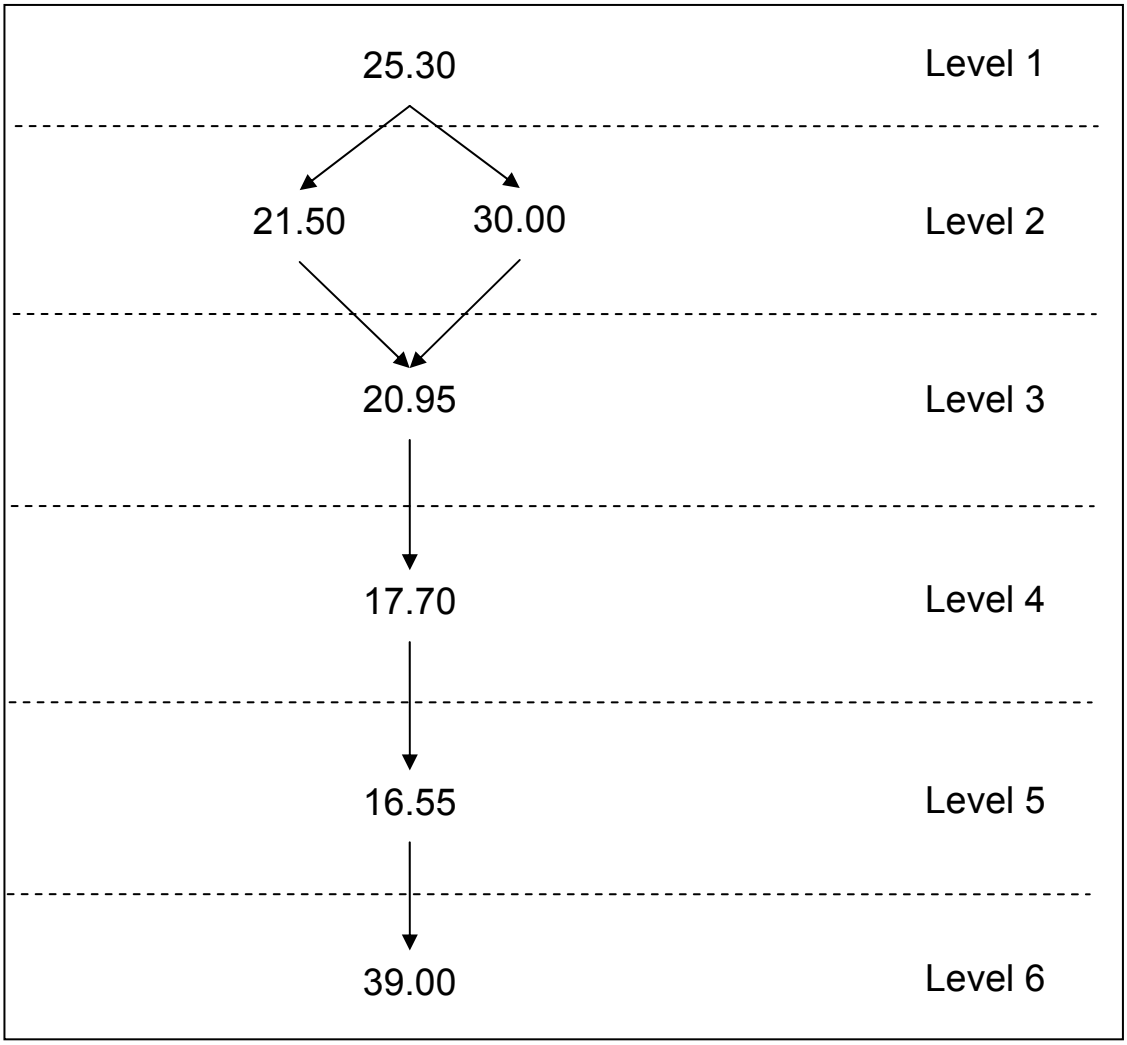
Στην υποκατηγορία αυτή, ο Kießling ορίζει, επίσης, 5 είδη προτιμήσεων: την *AROUND προτίμηση*, την *BETWEEN προτίμηση*, την *LOWEST προτίμηση*, την *HIGHEST προτίμηση* και την *SCORE προτίμηση*. Εφόσον οι προτιμήσεις αυτές λαμβάνουν χώρα σε σύνολα τιμών που ανήκουν σε *αριθμητικούς τύπους δεδομένων*, για τη διάταξη των τιμών αυτών το πλαίσιο του Kießling χρησιμοποιεί τους αριθμητικούς τελεστές σύγκρισης "$<$", "$>$" και αφαίρεσης "$-$", καθώς επίσης και ένα σύνολο από *συναρτήσεις απόστασης (distance functions)* που ορίζονται μέσω των παραπάνω τελεστών.

Ορισμός 4.24: *Έστω* A *ένα μη-κενό σύνολο από ονόματα γνωρισμάτων, όπου το* $dom(A)$ *αποτελείται από στοιχεία αριθμητικού τύπου δεδομένων. Επίσης, δοθέντος ενός* $z \in dom(A)$, *τότε* $\forall v \in dom(A)$, *έστω* $dis\tan ce(v,z) = abs(v-z)$, *όπου* abs *η συνάρτηση της απόλυτης τιμής. Μια προτίμηση* $P = (A, <_P)$ *είναι μια* $AROUND$ *προτίμηση πάνω στο* A *με βάση το* z *(*$P := AROUND(A,z)$, *όπου* $AROUND(A,z)$ *ο κατασκευαστής της* $AROUND$

προτίμησης), αν $\forall x, y \in dom(A)$ *με* $x \neq y$, $x <_P y$ *άνν* $dis\tan ce(x,z) > dis\tan ce(y,z)$. □

Απ' ότι παρατηρούμε, η $AROUND$ προτίμηση σχετίζεται με μια *συγκεκριμένη τιμή* του $dom(A)$, η οποία και αποτελεί το σημείο αναφοράς της επιθυμίας του χρήστη. Τιμές πιο κοντά στην τιμή αυτή θεωρούνται προτιμότερες σε σχέση με τιμές που είναι πιο μακριά.

Παράδειγμα 4.20: Έστω πάλι το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω μια $AROUND$ προτίμηση $P_8 := AROUND(\Pr ice-in-Euro, 25.75)$. Αυτό σημαίνει ότι μέσω της $P_8 = (\Pr ice-in-Euro, <_{P_8})$ ένας δεκαδικός αριθμός που είναι πιο κοντά στην τιμή 25.75 σε σχέση με κάποιον άλλο θεωρείται προτιμότερος από αυτόν. Η αντιστοίχηση της P_8 πάνω στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα (μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_8^{\Sigma} = (\Sigma[\Pr ice-in_Euro], <_{P_8})$ πάνω στο $\Sigma[\Pr ice-in-Euro] = \{20.95, 21.50, 25.30, 17.70, 30.00, 16.55, 39.00\}$, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.25. Απ' ότι βλέπουμε, οι τιμές 21.50 και 30.00 δεν διατάσσονται μεταξύ τους, εφόσον $dis\tan ce(21.50, 25.75) = dis\tan ce(30.00, 25.75) = 4.25$. □



Εικόνα 4.25 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_8^{\Sigma} = (\Sigma[\mathrm{Pr}\,ice - in_Euro], <_{P_8})$

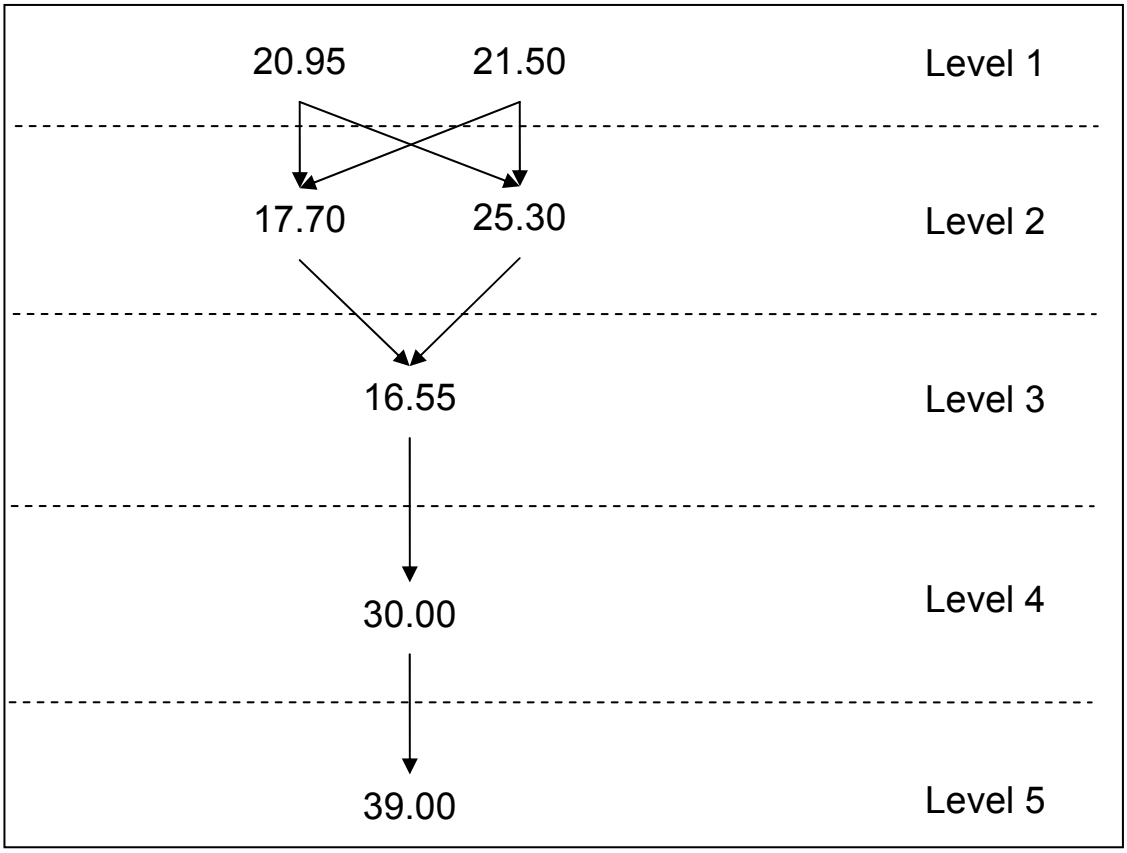
Ορισμός 4.25: *Έστω* A *ένα μη-κενό σύνολο από ονόματα γνωρισμάτων, όπου το* $dom(A)$ *αποτελείται από στοιχεία αριθμητικού τύπου δεδομένων. Επίσης, δοσμένου ενός διαστήματος* $[low, up] \subset dom(A)$, *τότε* $\forall v \in dom(A)$ *έστω*

$$dis\tan ce(v,[low,up]) = \begin{cases} 0, & if \quad v \in [low,up] \\ low - v, & if \quad v < low \\ v - up, & if \quad v > up \end{cases}$$

Μια προτίμηση $P = (A, <_P)$ *είναι μια* $BETWEEN$ *προτίμηση πάνω στο* A *με βάση το* $[low, up]$ *(*$P := BETWEEN(A,[low,up])$*, όπου* $BETWEEN(A,[low,up])$ *ο κατασκευαστής της* $BETWEEN$ *προτίμησης), αν* $\forall x, y \in dom(A)$ *με* $x \neq y$, $x <_P y$ *άνν* $dis\tan ce(x,[low,up]) > dis\tan ce(y,[low,up])$.□

Απ' ότι παρατηρούμε, η $BETWEEN$ προτίμηση σχετίζεται με ένα *συγκεκριμένο διάστημα τιμών* του $dom(A)$, το οποίο και αποτελεί το διάστημα αναφοράς της επιθυμίας του χρήστη. Τιμές που ανήκουν στο διάστημα αυτό θεωρούνται οι πλέον προτιμότερες. Μεταξύ δύο τιμών που δεν ανήκουν στο $[low,up]$, η τιμή που βρίσκεται πιο κοντά σ' ένα από τα δύο άκρα του θεωρείται προτιμότερη.

Παράδειγμα 4.21: Έστω πάλι το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω μια $BETWEEN$ προτίμηση $P_9 := BETWEEN(\text{Price}-in-Euro,[20.95,22.05])$. Αυτό σημαίνει ότι μέσω της $P_9 = (\text{Price}-in-Euro,<_{P_9})$ όλες οι δεκαδικές τιμές που ανήκουν στο διάστημα $[20.95,22.05]$ αποτελούν τις πλέον ενδιαφέρουσες, καθώς, επίσης, και μεταξύ δύο δεκαδικών τιμών που δεν ανήκουν στο παραπάνω διάστημα, η τιμή που βρίσκεται πιο κοντά στα άκρα του διαστήματος αυτού θεωρείται προτιμότερη. Η αντιστοίχηση της P_9 πάνω στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα (μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_9^{\Sigma} = (\Sigma[\text{Price}-in_Euro],<_{P_9})$ πάνω στο $\Sigma[\text{Price}-in-Euro] = \{20.95,\ 21.50,\ 25.30,\ 17.70,\ 30.00,\ 16.55,\ 39.00\}$, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.26. Απ' ότι βλέπουμε, οι τιμές 20.95 και 21.50, καθώς και οι τιμές 25.30 και 17.70, δεν διατάσσονται μεταξύ τους, εφόσον $dis\tan ce(20.95,[20.95,22.05]) = dis\tan ce(21.50,[20.95,22.05]) = 0$, καθώς και $dis\tan ce(25.30,[20.95,22.05]) = dis\tan ce(17.70,[20.95,22.05]) = 3.25$. □



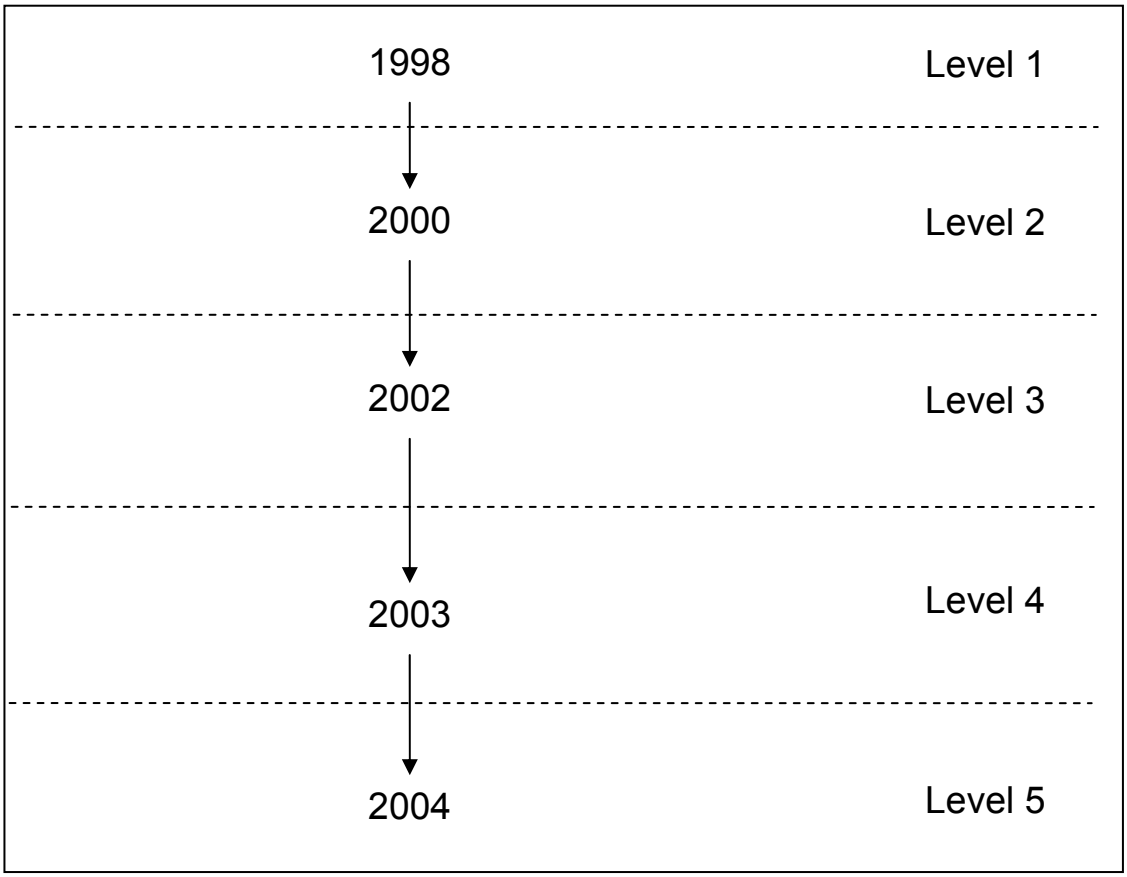
Εικόνα 4.26 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_9^{\Sigma} = (\Sigma[\mathrm{Pr}\,ice - in_Euro], <_{P_9})$

Ορισμός 4.26: *Έστω* A *ένα μη-κενό σύνολο από ονόματα γνωρισμάτων, όπου το* $dom(A)$ *αποτελείται από στοιχεία αριθμητικού τύπου δεδομένων. Μια προτίμηση* $P = (A, <_P)$ *είναι μια* $LOWEST$ *προτίμηση πάνω στο* A *(*$P := LOWEST(A)$*, όπου* $LOWEST(A)$ *ο κατασκευαστής της* $LOWEST$ *προτίμησης), αν* $\forall x, y \in dom(A)$ *με* $x \neq y$*,* $x <_P y$ *άνν* $x > y$*.*□

Απ' ότι βλέπουμε, η $LOWEST$ προτίμηση εκφράζει την επιθυμία για όσο το δυνατό μικρότερες τιμές. Επίσης, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι αυτό το είδος προτίμησης αποτελεί μια αλυσίδα προτιμήσεων (Ορισμός 4.13).

Παράδειγμα 4.22: Έστω πάλι το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω μια $LOWEST$ προτίμηση $P_{10} := LOWEST(Year)$. Αυτό σημαίνει ότι μέσω της $P_{10} = (Year, <_{P_{10}})$ μια χρονολογία που είναι μικρότερη σε σχέση με κάποια

άλλη, θεωρείται προτιμότερη από αυτή. Η αντιστοίχηση της P_{10} πάνω στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα (μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_{10}^{\Sigma} = (\Sigma[Year], <_{P_{10}})$ πάνω στο $\Sigma[Year] = \{2002, 2000, 2004, 1998, 2003\}$, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.27.□



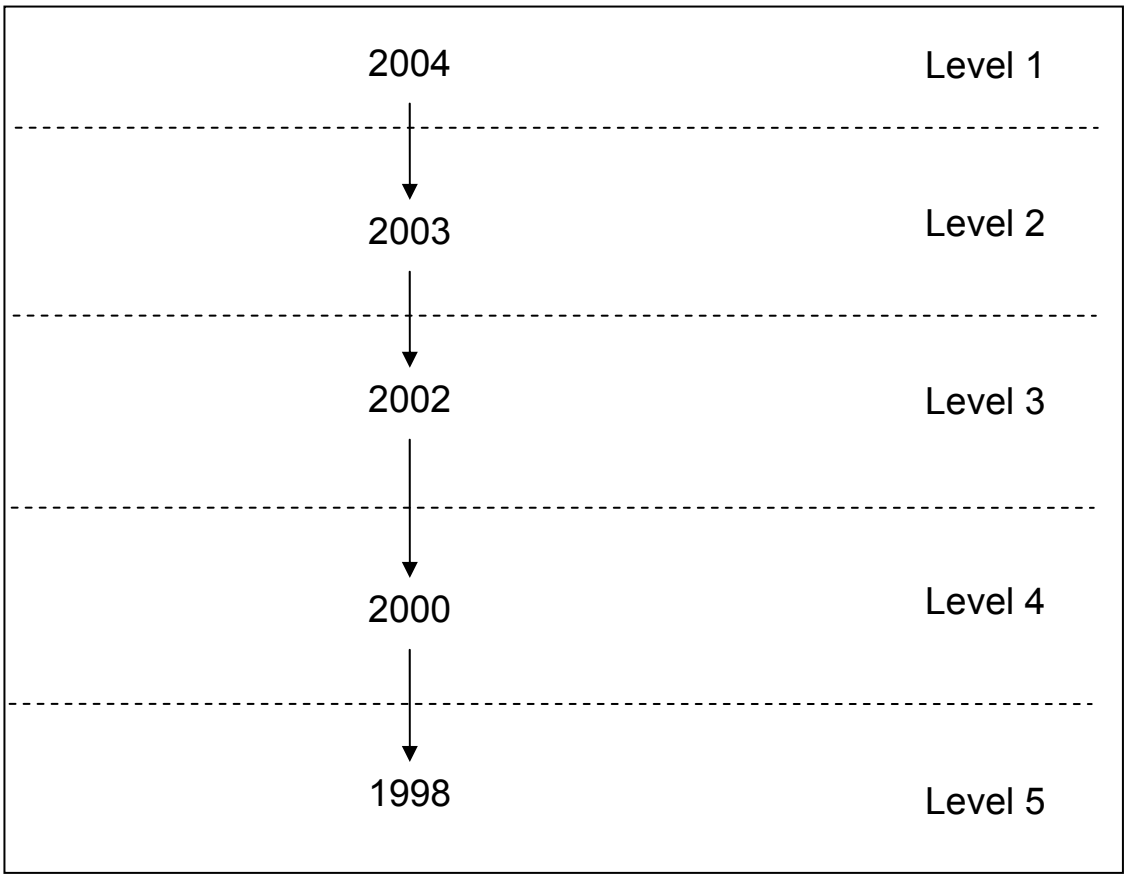
Εικόνα 4.27 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{10}^{\Sigma} = (\Sigma[Year], <_{P_{10}})$

Ορισμός 4.27: *Έστω* A *ένα μη-κενό σύνολο από ονόματα γνωρισμάτων, όπου το* $dom(A)$ *αποτελείται από στοιχεία αριθμητικού τύπου δεδομένων. Μια προτίμηση* $P = (A, <_P)$ *είναι μια* $HIGHEST$ *προτίμηση πάνω στο* A *(*$P := HIGHEST(A)$*, όπου* $HIGHEST(A)$ *ο κατασκευαστής της* $HIGHEST$ *προτίμησης), αν* $\forall x, y \in dom(A)$ *με* $x \neq y$, $x <_P y$ *άνν* $x < y$.□

Απ' ότι παρατηρούμε, η $HIGHEST$ προτίμηση έχει την ακριβώς αντίστροφη σημασιολογία σε σχέση με τη $LOWEST$ προτίμηση, εφόσον εκφράζει την επιθυμία για όσο το δυνατό μεγαλύτερες τιμές. Επίσης, μπορούμε εύκολα να

συμπεράνουμε ότι και αυτό το είδος προτίμησης αποτελεί μια αλυσίδα προτιμήσεων (Ορισμός 4.13).

Παράδειγμα 4.23: Έστω πάλι το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω μια *HIGHEST* προτίμηση $P_{11} := HIGHEST(Year)$. Αυτό σημαίνει ότι μέσω της $P_{11} = (Year, <_{P_{11}})$ μια χρονολογία που είναι μεγαλύτερη σε σχέση με κάποια άλλη, θεωρείται προτιμότερη από αυτή. Η αντιστοίχηση της P_{11} πάνω στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα (μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_{11}^{\Sigma} = (\Sigma[Year], <_{P_{11}})$ πάνω στο $\Sigma[Year] = \{2002, 2000, 2004, 1998, 2003\}$, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.28. Απ' ότι παρατηρούμε, ο γράφος αυτός αποτελεί τον «καλύτερο-από» γράφο της $P_{10}^{\Sigma} = (\Sigma[Year], <_{P_{10}})$ (Παράδειγμα 4.22) στην Εικόνα 4.27 με αντεστραμμένες τις φορές των ακμών.□

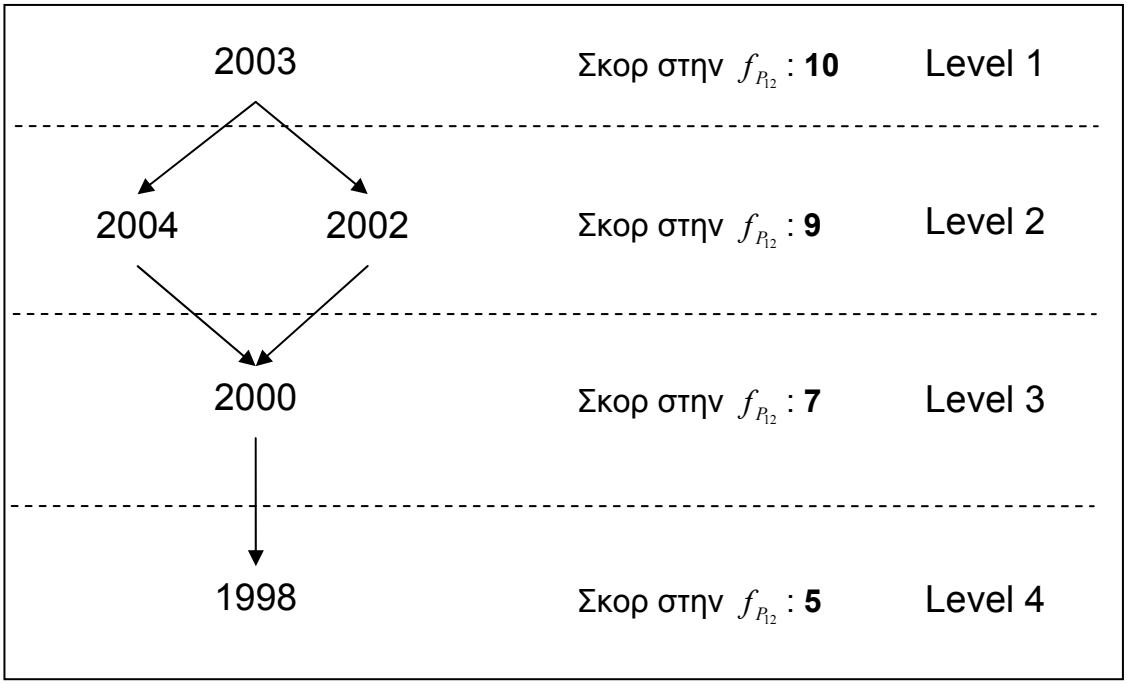


Εικόνα 4.28 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{11}^{\Sigma} = (\Sigma[Year], <_{P_{11}})$

Ορισμός 4.28: *Έστω A ένα μη-κενό σύνολο από ονόματα γνωρισμάτων, όπου το $dom(A)$ αποτελείται από στοιχεία αριθμητικού τύπου δεδομένων. Επίσης, έστω μια συνάρτηση βαθμολόγησης $f : dom(A) \to \Re$. Μια προτίμηση $P = (A, <_P)$ είναι μια $SCORE$ προτίμηση πάνω στο A μέσω της f ($P := SCORE(A, f)$, όπου $SCORE(A, f)$ ο κατασκευαστής της $SCORE$ προτίμησης), αν $\forall x, y \in dom(A)$ με $x \neq y$, $x <_P y$ άνν $f(x) < f(y)$.*□

Σημασιολογικά, η $SCORE$ προτίμηση αποτελεί ένα είδος αναπαράστασης διατάξεων της ποσοτικής προσέγγισης προτιμήσεων (μέσω μιας συνάρτησης βαθμολόγησης στο $dom(A)$) πάνω στο μοντέλο ποιοτικής προσέγγισης του Kießling.

Παράδειγμα 4.24: Έστω πάλι το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω μια $SCORE$ προτίμηση $P_{12} := SCORE(Year, f_{P_{12}})$, όπου $f_{P_{12}} : dom(Year) \to \Re$ και $\forall x \in dom(Year)$, $f_{P_{12}}(x) = 10 - abs(x - 2003)$. Μέσω της $f_{P_{12}}$, παρατηρούμε ότι χρονολογίες όσο πιο κοντά στην τιμή 2003 έχουν μεγαλύτερο σκορ, οπότε και θεωρούνται προτιμότερες στην $P_{12} = (Year, <_{P_{12}})$. Η αντιστοίχηση της P_{12} πάνω στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα (μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_{12}^{\Sigma} = (\Sigma[Year], <_{P_{12}})$ πάνω στο $\Sigma[Year] = \{2002, 2000, 2004, 1998, 2003\}$, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.29. Απ' ότι βλέπουμε, οι τιμές 2002 και 2004 δεν διατάσσονται μεταξύ τους, εφόσον $f_{P_{12}}(2002) = f_{P_{12}}(2004) = 9$.□



Εικόνα 4.29 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{12}^{\Sigma} = (\Sigma[Year], <_{P_{12}})$

4.1.2.1.2 Σύνθετες Προτιμήσεις

Στην κατηγορία αυτή, ο Kießling προτείνει ένα σύνολο από συνθέσεις προτιμήσεων, οι οποίες οδηγούν σε καινούριες, *σύνθετες*, προτιμήσεις. Όπως ειπώθηκε παραπάνω, οι συνθέσεις αυτές διαχωρίζονται ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο συντίθενται οι συνιστώσες προτιμήσεις, δηλαδή, με συσσώρευση ή με συνάθροιση. Παρακάτω, αναλύουμε τα είδη των σύνθετων προτιμήσεων που παρέχονται με τους δύο αυτούς τρόπους σύνθεσης, παραθέτοντας τους ορισμούς τους, καθώς και ενδεικτικά παραδείγματα.

4.1.2.1.2.1 Σύνθετες Προτιμήσεις με Συσσώρευση

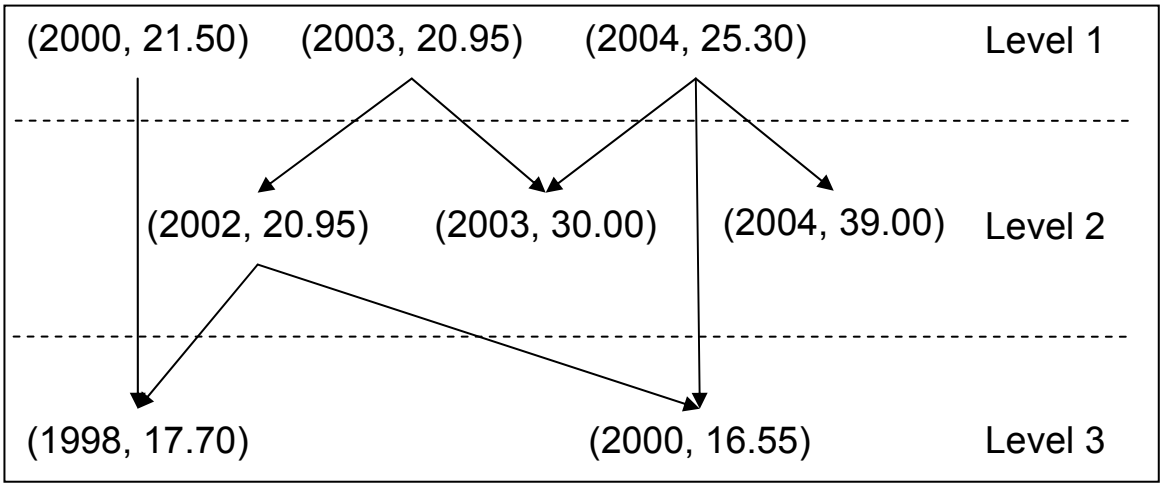
Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η συσσώρευση προτιμήσεων χαρακτηρίζεται από το *συνδυασμό* των επιμέρους προτιμήσεων πάνω σε σύνολα ονομάτων γνωρισμάτων. Στο πλαίσιο του Kießling, διακρίνονται τρία είδη σύνθετων προτιμήσεων που προκύπτουν από τη συσσώρευση των προτιμήσεων-συνιστωσών: Η *προτίμηση κατά Pareto (Pareto preference)*, η *προτίμηση προτεραιότητας (prioritized preference)* και η *αριθμητική προτίμηση (numerical preference)*.

Ορισμός 4.29: *Έστω* $P' = (A, <_{P'})$ *και* $P'' = (B, <_{P''})$ *δύο προτιμήσεις πάνω σε δύο μη-κενά σύνολα* A *και* B *από ονόματα γνωρισμάτων. Μια προτίμηση* $P = (A \cup B, <_P)$ *είναι η προτίμηση κατά Pareto (Pareto preference) των* P' *και* P'' *(*$P := P' \otimes P''$*, όπου "*$\otimes$*" ο κατασκευαστής της προτίμησης κατά Pareto), αν* $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in dom(A) \times dom(B)$ *με* $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$, $(x_1, x_2) <_P (y_1, y_2)$ *άνν (*$x_1 <_{P'} y_1$ *και (*$x_2 <_{P''} y_2$ *ή* $x_2 = y_2$*)) ή (*$x_2 <_{P''} y_2$ *και (*$x_1 <_{P'} y_1$ *ή* $x_1 = y_1$*).*□

Σημασιολογικά, η προτίμηση κατά Pareto αναπαριστά τη συσσώρευση των P' και P'', στην οποία οι δύο συνιστώσες προτιμήσεις θεωρούνται *ισοδύναμες*: Δεδομένων δύο τιμών $x = (x_1, x_2)$ και $y = (y_1, y_2)$ με $x \neq y$, η τιμή y θεωρείται καλύτερη από την τιμή x στην $P := P' \otimes P''$, μόνο στην περίπτωση που *για μια τιμή του* i*, όπου* $\forall i \in \{1,2\}$*, το* y_i *είναι καλύτερο από το* x_i *μέσω της αντίστοιχης συνιστώσας προτίμησης και για την εναπομένουσα τιμή του* i *από το* $\{1,2\}$ *το* y_i *δεν είναι χειρότερο από το* x_i *μέσω της αντίστοιχης συνιστώσας προτίμησης*. Εφόσον στο πλαίσιο του Kießling οι προτιμήσεις αποτελούν αυστηρές μερικές διατάξεις, ο Ορισμός 4.29 είναι η άμεση εφαρμογή του ορισμού της διάταξης μέσω συντεταγμένων (Ορισμός 2.10) πάνω σε αυστηρές μερικές διατάξεις. Με βάση το γεγονός αυτό, η προτίμηση κατά Pareto δύο οποιωνδήποτε προτιμήσεων-αυστηρών μερικών διατάξεων που καθορίζονται με βάση τους ορισμούς του Kießling, αποτελεί *και αυτή αυστηρή μερική διάταξη*, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί *και αυτή* ως συνιστώσα προτίμηση για συνθέσεις πιο πολύπλοκων προτιμήσεων στο πλαίσιό του .

Παράδειγμα 4.25: Έστω πάλι το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω οι προτιμήσεις $P_9 := BETWEEN(\mathrm{Price-in-Euro}, [20.95, 22.05])$ του Παραδείγματος 4.21 και $P_{11} := HIGHEST(Year)$ του Παραδείγματος 4.23. Η προτίμηση $P_{13} := P_9 \otimes P_{11}$ αποτελεί την προτίμηση κατά Pareto των P_9 και P_{11} πάνω στο σύνολο $\{\mathrm{Price-in-Euro}\} \cup \{Year\} = \{Year, \mathrm{Price-in-Euro}\}$, στην

οποία οι παραπάνω προτιμήσεις θεωρούνται ισοδύναμες. Η αντιστοίχηση της $P_{13} = (\{Year, \Pr ice - in - Euro\}, <_{P_{13}})$ πάνω στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα (μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_{13}^{\Sigma} = (\Sigma[\{Year, \Pr ice - in - Euro\}], <_{P_{13}})$ πάνω στο $\Sigma[\{Year, \Pr ice - in - Euro\}]$ = {(2002, 20.95), (2000, 21.50), (2004, 25.30), (1998, 17.70), (2003, 30.00), (2000, 16.55), (2004, 39.00), (2003, 20.95)}, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.30.□



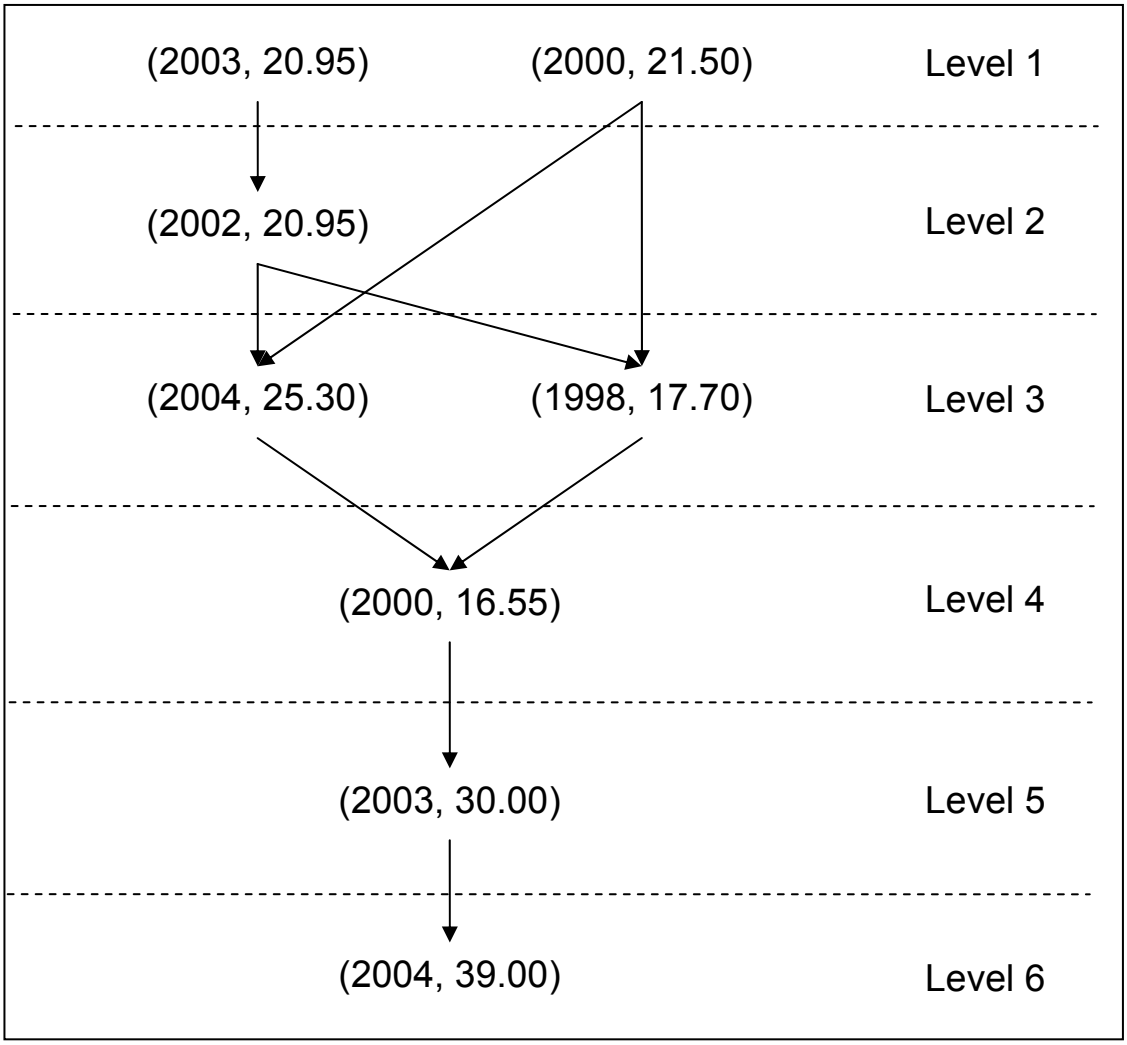
Εικόνα 4.30 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{13}^{\Sigma} = (\Sigma[\{Year, \Pr ice - in - Euro\}], <_{P_{13}})$

Ορισμός 4.30: *Έστω* $P' = (A, <_{P'})$ *και* $P'' = (B, <_{P''})$ *δύο προτιμήσεις πάνω σε δύο μη-κενά σύνολα* A *και* B *από ονόματα γνωρισμάτων. Μια προτίμηση* $P = (A \cup B, <_P)$ *είναι η προτίμηση προτεραιότητας (prioritized preference) των* P' *και* P'' *(*$P := P' \,\&\, P''$*, όπου "&" ο κατασκευαστής της προτίμησης προτεραιότητας), αν* $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in dom(A) \times dom(B)$ *με* $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$*,* $(x_1, x_2) <_P (y_1, y_2)$ *άνν (*$x_1 <_{P'} y_1$ *) ή (*$x_1 = y_1$ *και* $x_2 <_{P''} y_2$*).*□

Σημασιολογικά, η προτίμηση προτεραιότητας των P' και P'' αναπαριστά τη συσσώρευση των P' και P'', στην οποία η P' θεωρείται *πιο σημαντική* σε σχέση με την P'', εφόσον η P'' λαμβάνεται υπόψη μόνο όταν η P' *δεν προσφέρει κάποια διάταξη μεταξύ των τιμών στο* $dom(A)$ (κατά τον Kießling, όταν $x_1 = y_1$). Εφόσον στο πλαίσιο του Kießling οι προτιμήσεις αποτελούν αυστηρές μερικές διατάξεις, ο Ορισμός 4.30 είναι η άμεση εφαρμογή του ορισμού της λεξικογραφικής διάταξης (Ορισμός 2.11) πάνω σε αυστηρές

μερικές διατάξεις. Με βάση το γεγονός αυτό, η προτίμηση προτεραιότητας δύο οποιωνδήποτε προτιμήσεων-αυστηρών μερικών διατάξεων που καθορίζονται με βάση τους ορισμούς του Kießling, αποτελεί *και αυτή αυστηρή μερική διάταξη*, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί *και αυτή* ως συνιστώσα προτίμηση για συνθέσεις πιο πολύπλοκων προτιμήσεων στο πλαίσιό του.

Παράδειγμα 4.26: Έστω το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω ξανά οι προτιμήσεις $P_9 := BETWEEN(\text{Price}-in-Euro, [20.95, 22.05])$ του Παραδείγματος 4.21 και $P_{11} := HIGHEST(Year)$ του Παραδείγματος 4.23. Η προτίμηση $P_{14} := P_9 \,\&\, P_{11}$ αποτελεί την προτίμηση προτεραιότητας των P_9 και P_{11} πάνω στο σύνολο $\{\text{Price}-in-Euro\} \cup \{Year\} = \{Year, \text{Price}-in-Euro\}$, στην οποία η P_9 θεωρείται πιο σημαντική σε σχέση με την P_{11}. Η αντιστοίχηση της $P_{14} = (\{Year, \text{Price}-in-Euro\}, <_{P_{14}})$ πάνω στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα (μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_{14}^{\Sigma} = (\Sigma[\{Year, \text{Price}-in-Euro\}], <_{P_{14}})$ πάνω στο $\Sigma[\{Year, \text{Price}-in-Euro\}] =$ {(2002, 20.95), (2000, 21.50), (2004, 25.30), (1998, 17.70), (2003, 30.00), (2000, 16.55), (2004, 39.00), (2003, 20.95)}, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.31.□



Εικόνα 4.31 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{14}^{\Sigma} = (\Sigma[\{Year, \text{Price} - in - Euro\}], <_{P_{14}})$

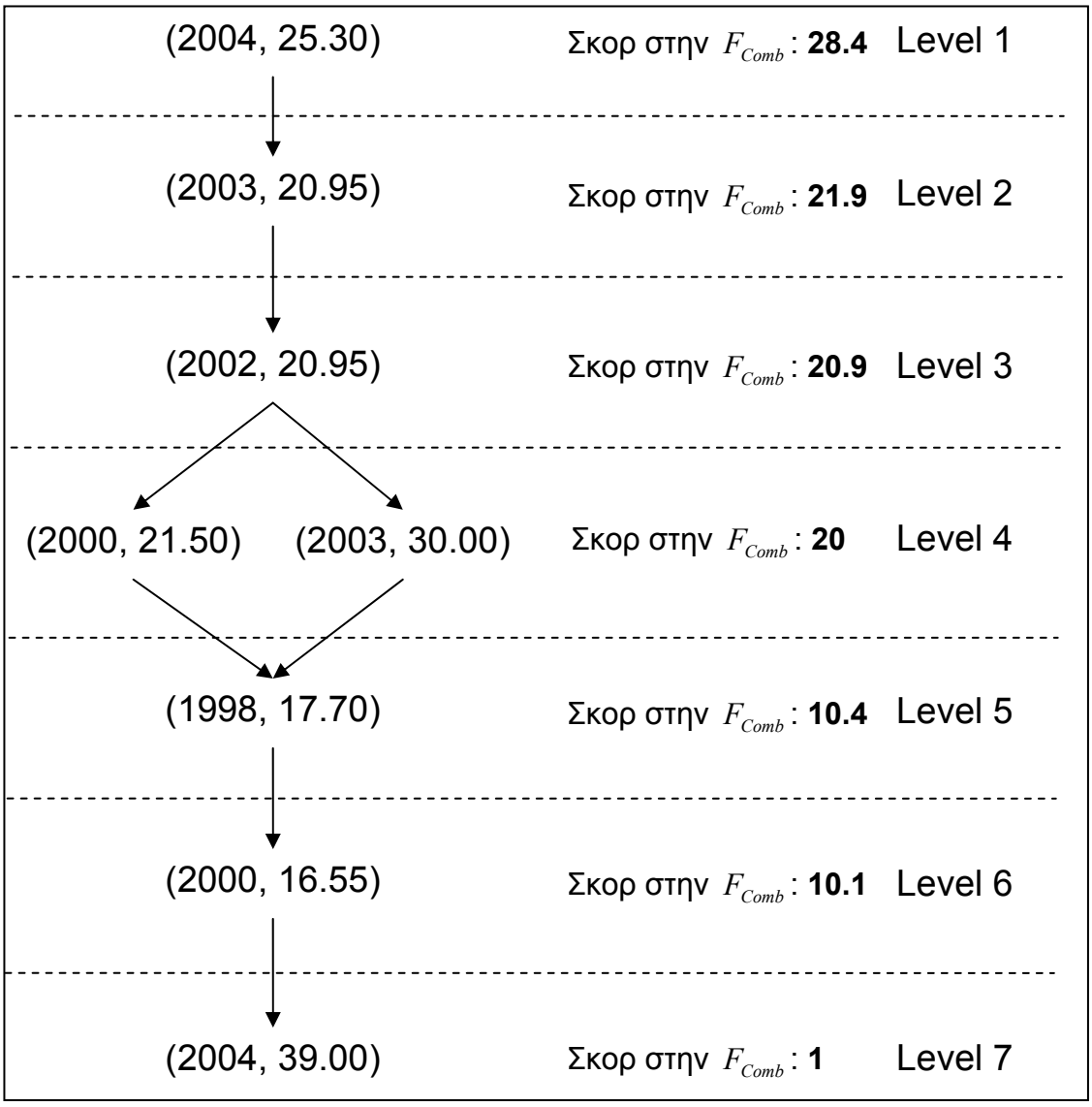
Ορισμός 4.31: *Έστω* $P' := SCORE(A, f_A)$ *και* $P'' := SCORE(B, f_B)$ *δύο* $SCORE$ *προτιμήσεις πάνω σε δύο μη-κενά σύνολα* A *και* B *από ονόματα γνωρισμάτων, όπου* f_A *και* f_B *οι αντίστοιχες συναρτήσεις βαθμολόγησης. Επίσης, έστω* $F : \Re \times \Re \to \Re$, *μια συνάρτηση συνδυασμού (combining function) των* f_A *και* f_B. *Μια προτίμηση* $P = (A \cup B, <_P)$ *είναι η αριθμητική προτίμηση (numerical preference) των* P' *και* P'' *μέσω της* F *(*$P := rank_F(P', P'')$, *όπου "*$rank_F$*" ο κατασκευαστής της αριθμητικής προτίμησης), αν* $\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in dom(A) \times dom(B)$ *με* $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$, $(x_1, x_2) <_P (y_1, y_2)$ *άνν* $F(f_A(x_1), f_B(x_2)) < F(f_A(y_1), f_B(y_2))$. □

Σημασιολογικά, η αριθμητική προτίμηση των P' και P'' αναπαριστά τη συσσώρευση των $SCORE$ προτιμήσεων P' και P'' μέσω μιας νέας συνάρτησης βαθμολόγησης F, η οποία και αποτελεί συνδυασμό των συναρτήσεων βαθμολόγησης f_A και f_B των επιμέρους προτιμήσεων. Απ' ότι παρατηρούμε, η σύνθετη αυτή προτίμηση ορίζεται *με τρόπο παρόμοιο όπως η* $SCORE$ *προτίμηση* (Ορισμός 4.28), εφόσον τα στοιχεία του $dom(A \cup B)$ διατάσσονται με βάση την αντίστοιχη τιμή τους μέσω της F[7], άρα *και αυτή αποτελεί αυστηρή μερική διάταξη* και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συνιστώσα για οποιαδήποτε σύνθεση προτιμήσεων έχουμε δει ως τώρα και πρόκειται να δούμε στη συνέχεια. Όμως, από την άλλη μεριά, μπορούμε να διακρίνουμε από τον Ορισμό 4.31 ότι η αριθμητική προτίμηση μπορεί να δημιουργηθεί *μόνο* μέσω $SCORE$ προτιμήσεων.

Παράδειγμα 4.27: Έστω το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1. Επίσης, έστω η $SCORE$ προτίμηση $P_{12} := SCORE(Year, f_{P_{12}})$ του Παραδείγματος 4.24, μια $SCORE$ προτίμηση $P_{15} := SCORE(\text{Price} - in - Euro, f_{P_{15}})$, όπου $\forall x \in dom(\text{Price} - in - Euro)$, $f_{P_{15}}(x) = 10 - abs(x - 25)$ και $F_{Comb} : \Re \times \Re \to \Re$ μια συνάρτηση συνδυασμού των $f_{P_{12}}$ και $f_{P_{15}}$, όπου $\forall (x_1, x_2) \in dom(Year) \times dom(\text{Price} - in - Euro)$, $F_{Comb}(f_{P_{12}}(x_1), f_{P_{15}}(x_2)) = f_{P_{12}}(x_1) + 2 * f_{P_{15}}(x_2)$ (η F_{Comb} μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα βαρών, στην οποία και δίνεται διπλάσιο βάρος στην $f_{P_{15}}$ σε σχέση με την $f_{P_{12}}$). Η προτίμηση $P_{16} := rank_{F_{Comb}}(P_{12}, P_{15})$ αποτελεί την αριθμητική προτίμηση των P_{12} και P_{15} μέσω της F_{Comb} πάνω στο σύνολο των ονομάτων γνωρισμάτων $\{Year\} \cup \{\text{Price} - in - Euro\} = \{Year, \text{Price} - in - Euro\}$, στην οποία τα στοιχεία διατάσσονται με βάση το σκορ τους στην F_{Comb}. Η αντιστοίχηση της $P_{16} = (\{Year, \text{Price} - in - Euro\}, <_{P_{16}})$ πάνω στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα

[7] Αν και η αριθμητική προτίμηση ορίζεται παρόμοια όπως η $SCORE$ προτίμηση, ωστόσο *δεν αποτελεί αυστηρά είδος* $SCORE$ *προτίμησης*, εφόσον η αντίστοιχη συνάρτηση βαθμολόγησης F σχετίζεται με τις συναρτήσεις βαθμολόγησης των προτιμήσεων-συνιστωσών, και όχι άμεσα με τα στοιχεία προς διάταξη.

(μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_{16}^{\Sigma} = (\Sigma[\{Year, \Pr ice - in - Euro\}], <_{P_{16}})$ πάνω στο $\Sigma[\{Year, \Pr ice - in - Euro\}]$ = {(2002, 20.95), (2000, 21.50), (2004, 25.30), (1998, 17.70), (2003, 30.00), (2000, 16.55), (2004, 39.00), (2003, 20.95)}, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.32.□



Εικόνα 4.32 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{16}^{\Sigma} = (\Sigma[\{Year, \Pr ice - in - Euro\}], <_{P_{16}})$

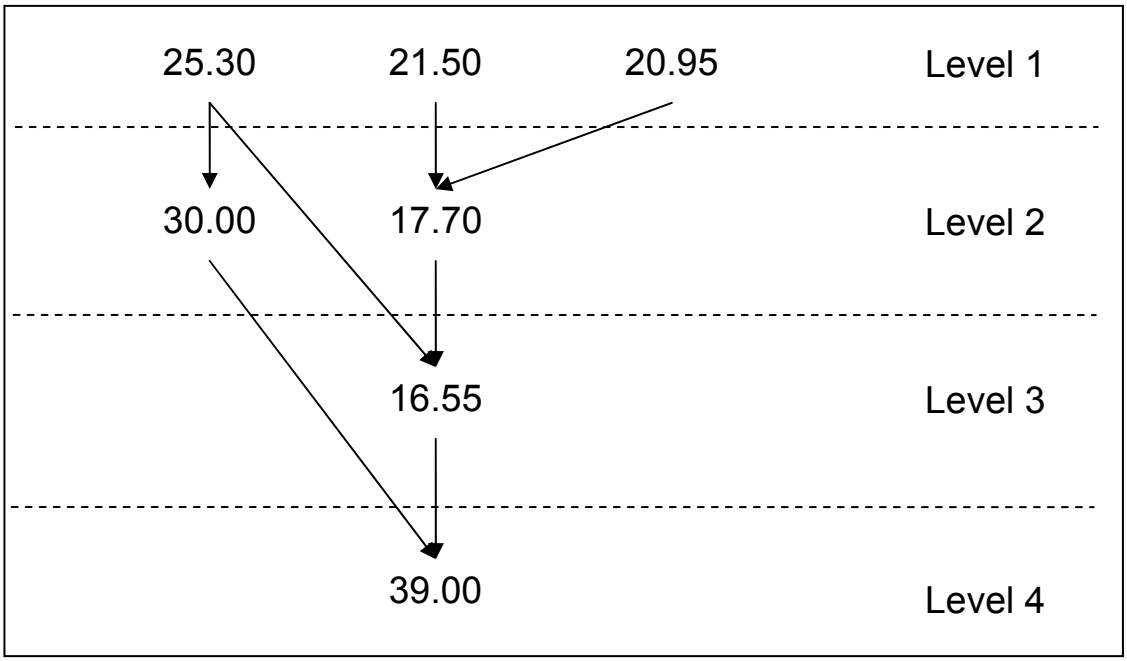
4.1.2.1.2.2 Σύνθετες Προτιμήσεις με Συνάθροιση

Όπως συζητήθηκε παραπάνω, το χαρακτηριστικό της συνάθροισης προτιμήσεων είναι η *συναρμολόγηση* της σύνθετης προτίμησης από τις επιμέρους προτιμήσεις. Στο πλαίσιο του Kießling, διακρίνονται τρία είδη σύνθετων προτιμήσεων που βασίζονται στη συνάθροιση των προτιμήσεων-συνιστωσών: Η *προτίμηση τομής (intersection preference)*, η *προτίμηση ξένης ένωσης (disjoint union preference)* και η *προτίμηση γραμμικού αθροίσματος (linear sum preference)*. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, οι προτιμήσεις αυτές, σε αντίθεση με τις σύνθετες προτιμήσεις μέσω συσσώρευσης, είναι δυνατό να δημιουργηθούν *μόνο* στην περίπτωση που οι συνιστώσες προτιμήσεις υπακούουν σε κάποιους *περιορισμούς*.

Ορισμός 4.32: *Έστω* $P' = (A, <_{P'})$ *και* $P'' = (A, <_{P''})$ *δύο προτιμήσεις πάνω στο ίδιο μη-κενό σύνολο* A *από ονόματα γνωρισμάτων. Μια προτίμηση* $P = (A, <_P)$ *είναι η προτίμηση τομής (intersection preference) των* P' *και* P'' *(*$P := P' \lozenge P''$*, όπου* "$\lozenge$" *ο κατασκευαστής της προτίμησης τομής), αν* $\forall x, y \in dom(A)$ *με* $x \neq y$, $x <_P y$ *άνν* $x <_{P'} y$ *και* $x <_{P''} y$. □

Από τον ορισμό, βλέπουμε ότι η προτίμηση τομής μπορεί να λάβει χώρα μόνο όταν οι δύο προτιμήσεις-συνιστώσες εκφράζονται πάνω στο *ίδιο* σύνολο ονομάτων γνωρισμάτων. Σημασιολογικά, αυτή η σύνθεση «κρατά» τις συσχετίσεις μεταξύ των τιμών του $dom(A)$ που ισχύουν *και* στις δύο επιμέρους προτιμήσεις. Απ' ότι παρατηρούμε, η προτίμηση τομής του Kießling αποτελεί έναν πιο περιοριστικό ορισμό της σύνθεσης τομής του Chomicki (στον Kießling, οι προτιμήσεις-συνιστώσες πρέπει να εφαρμόζονται στο ίδιο σύνολο γνωρισμάτων, πράγμα το οποίο είναι μια υπο-περίπτωση της εφαρμογής δύο σχέσεων προτίμησης πάνω στον ίδιο σχεσιακό πίνακα κατά τον Chomicki), η οποία σύνθεση, όπως παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.2, διατηρεί την αυστηρή μερική διάταξη. Άρα, και η προτίμηση τομής, εφόσον εξ ορισμού οι συνιστώσες προτιμήσεις είναι αυστηρές μερικές διατάξεις, είναι *και αυτή αυστηρή μερική διάταξη*, οπότε και μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συνιστώσα για περαιτέρω συνθέσεις προτιμήσεων.

Παράδειγμα 4.28: Έστω το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω οι προτιμήσεις $P_8 := AROUND(\text{Pr}\,ice-in-Euro, 25.75)$ του Παραδείγματος 4.20 και $P_9 := BETWEEN(\text{Pr}\,ice-in-Euro, [20.95, 22.05])$ του Παραδείγματος 4.21. Η προτίμηση $P_{17} := P_8 \lozenge P_9$ αποτελεί την προτίμηση τομής των P_8 και P_9 πάνω στο $\text{Pr}\,ice-in-Euro$. Η αντιστοίχηση της $P_{17} = (\text{Pr}\,ice-in-Euro, <_{P_{17}})$ πάνω στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα (μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_{17}^{\Sigma} = (\Sigma[\text{Pr}\,ice-in-Euro], <_{P_{17}})$ πάνω στο $\Sigma[\text{Pr}\,ice-in-Euro]$ = {20.95, 21.50, 25.30, 17.70, 30.00, 16.55, 39.00}, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.33.□



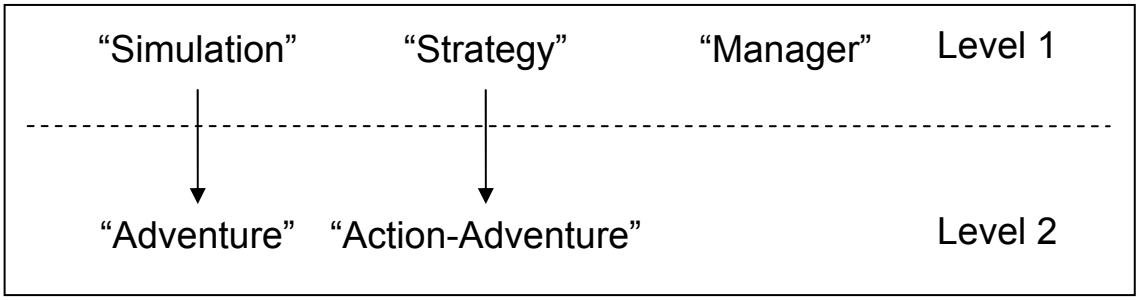
Εικόνα 4.33 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{17}^{\Sigma} = (\Sigma[\text{Pr}\,ice-in-Euro], <_{P_{17}})$

Ορισμός 4.33: *Έστω* $P' = (A, <_{P'})$ *και* $P'' = (A, <_{P''})$ *δύο προτιμήσεις πάνω στο ίδιο μη-κενό σύνολο* A *από ονόματα γνωρισμάτων, όπου* $range(<_{P'}) \cap range(<_{P''}) = \varnothing$. *Μια προτίμηση* $P = (A, <_P)$ *είναι η προτίμηση ξένης ένωσης (disjoint union preference) των* P' *και* P'' *(*$P := P' + P''$*, όπου*

"+" *ο κατασκευαστής της προτίμησης ξένης ένωσης), αν* $\forall x, y \in dom(A)$ *με* $x \neq y$, $x <_P y$ *άνν* $x <_{P'} y$ *ή* $x <_{P''} y$.□

Από τον ορισμό, βλέπουμε ότι η προτίμηση ξένης ένωσης μπορεί να λάβει χώρα μόνο όταν οι δύο προτιμήσεις-συνιστώσες εκφράζονται πάνω στο *ίδιο* σύνολο ονομάτων γνωρισμάτων και τα πεδία των αυστηρών μερικών διατάξεων που τις αναπαριστούν είναι *ξένα μεταξύ τους*. Απ' ότι παρατηρούμε, ο Ορισμός 4.33 αποτελεί εφαρμογή του ορισμού της ξένης ένωσης (Ορισμός 2.12) πάνω σε προτιμήσεις-αυστηρές μερικές διατάξεις του πλαισίου του Kießling. Με βάση το γεγονός αυτό, η προτίμηση ξένης ένωσης δύο οποιωνδήποτε προτιμήσεων που καθορίζονται με βάση τους ορισμούς του Kießling και ικανοποιούν τους περιορισμούς της σύνθεσης αυτής, αποτελεί *και αυτή αυστηρή μερική διάταξη*, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί *και αυτή* ως συνιστώσα προτίμηση για συνθέσεις πιο πολύπλοκων προτιμήσεων στο πλαίσιό του.

Παράδειγμα 4.29: Έστω το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω δύο προτιμήσεις $P_{18} = (Category, <_{P_{18}})$ και $P_{19} = (Category, <_{P_{19}})$, τέτοιες ώστε *"Adventure"* $<_{P_{18}}$ *"Simulation"* και *"Action-Adventure"* $<_{P_{19}}$ *"Strategy"* αντίστοιχα. Απ' ότι παρατηρούμε, $range(<_{P_{18}}) \cap range(<_{P_{19}})$ = $\{"Adventure", Simulation"\} \cap \{"Action-Adventure", "Strategy"\}$ = $\varnothing$. Η προτίμηση $P_{20} := P_{18} + P_{19}$ αποτελεί την προτίμηση ξένης ένωσης των P_{18} και P_{19} πάνω στο γνώρισμα $Category$. Η αντιστοίχηση της $P_{20} = (Category, <_{P_{20}})$ πάνω στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα (μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_{20}^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_{20}})$ πάνω στο $\Sigma[Category]$ = *{"Adventure", "Action-Adventure", "Manager", "Strategy", "Simulation"}*, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.34.□



Εικόνα 4.34 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{20}^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_{20}})$

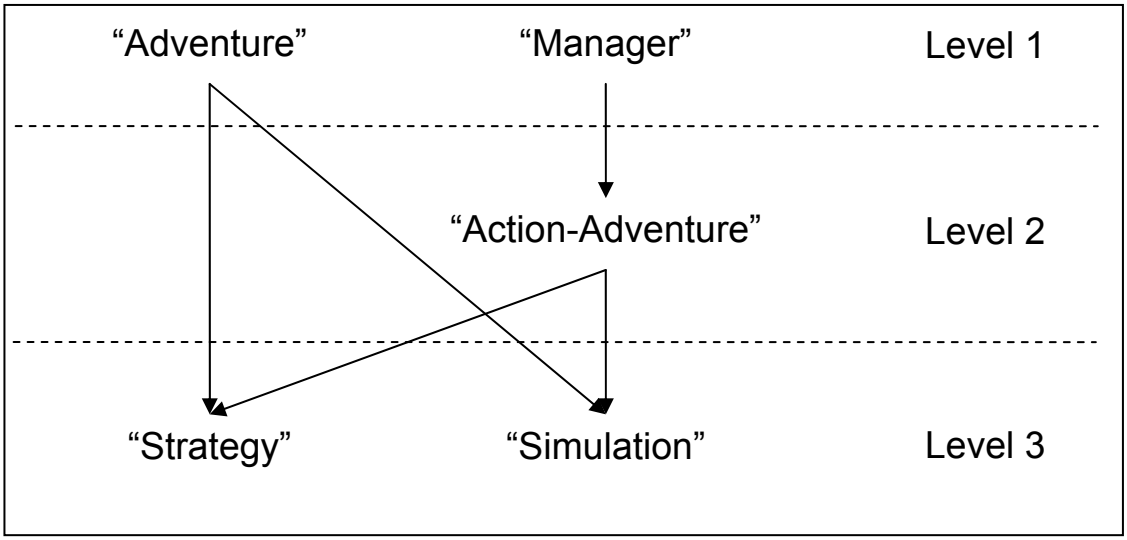
Ορισμός 4.34: *Έστω* $P' = (A', <_{P'})$ *και* $P'' = (A'', <_{P''})$ *προτιμήσεις πάνω στα απλά γνωρίσματα* A' *και* A''*, όπου* $A' \neq A''$ *και* $dom(A') \cap dom(A'') = \varnothing$ *(οπότε και* $range(<_{P'}) \cap range(<_{P''}) = \varnothing$*). Μια προτίμηση* $P = (A, <_P)$*, όπου* A *ένα νέο γνώρισμα με* $dom(A) = dom(A') \cup dom(A'')$*, είναι η προτίμηση γραμμικού αθροίσματος (linear sum preference) των* P' *και* P'' *(*$P := P' \oplus P''$*, όπου "⊕" ο κατασκευαστής της προτίμησης γραμμικού αθροίσματος), αν* $\forall x, y \in dom(A)$ *με* $x \neq y$*,* $x <_P y$ *άνν* $x <_{P'} y$ *ή* $x <_{P''} y$ *ή (*$x \in dom(A'')$ *και* $y \in dom(A')$*).*□

Από τον ορισμό, βλέπουμε ότι η προτίμηση γραμμικού αθροίσματος μπορεί να λάβει χώρα μόνο όταν οι δύο προτιμήσεις-συνιστώσες εκφράζονται πάνω *σε διαφορετικά γνωρίσματα* των οποίων τα πεδία τιμών είναι *ξένα μεταξύ τους*. Απ’ ότι παρατηρούμε, ο Ορισμός 4.34 αποτελεί μια παραλλαγή του ορισμού του γραμμικού αθροίσματος (Ορισμός 2.13) πάνω σε προτιμήσεις-αυστηρές μερικές διατάξεις του πλαισίου του Kießling. Με βάση το γεγονός αυτό, η προτίμηση γραμμικού αθροίσματος δύο οποιωνδήποτε προτιμήσεων που καθορίζονται με βάση τους ορισμούς του Kießling και ικανοποιούν τους περιορισμούς της σύνθεσης αυτής, αποτελεί *και αυτή αυστηρή μερική διάταξη*, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί *και αυτή* ως συνιστώσα προτίμηση για συνθέσεις πιο πολύπλοκων προτιμήσεων στο πλαίσιό του.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, στο σχεσιακό περιβάλλον, δεδομένου ενός συνόλου γνωρισμάτων που χαρακτηρίζουν έναν σχεσιακό πίνακα, η παραπάνω σύνθεση *δεν μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα*. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε γνώρισμα του πίνακα υποδηλώνει πληροφορία διαφορετικής σημασιολογίας για τις εκάστοτε πλειάδες του πίνακα αυτού και, τις περισσότερες φορές, η ένωση των πεδίων τιμών δύο διαφορετικών

γνωρισμάτων του πίνακα δεν έχει κάποιο νόημα για τη διάταξη των στοιχείων του συνόλου που έχουμε ως αποτέλεσμα της ένωσης αυτής. Η μόνη περίπτωση που μια προτίμηση γραμμικού αθροίσματος επιφέρει ουσιαστική διάταξη στο πεδίο τιμών ενός συγκεκριμένου γνωρίσματος του σχεσιακού πίνακα, είναι μέσω «ενδιάμεσων» γνωρισμάτων όπου η ένωση των πεδίων τιμών τους είναι ίση ή αποτελεί υποσύνολο του πεδίου τιμών αυτού του συγκεκριμένου γνωρίσματος.

Παράδειγμα 4.30: Έστω το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1 και έστω οι προτιμήσεις $P_{21} = (C_1, <_{P_{21}})$ και $P_{22} = (C_2, <_{P_{22}})$ πάνω στα «ενδιάμεσα» γνωρίσματα C_1 με $dom(C_1)$ = *{"RPG", "Adventure", "Action-Adventure", "Manager"}* και C_2 με $dom(C_2)$ = *{"Strategy", "Beat-em-up", "Simulation"}*, τέτοιες ώστε *"RPG"* $<_{P_{21}}$ *"Adventure"*, *"Action-Adventure"* $<_{P_{21}}$ *"Manager"* και *"Beat-em-up"* $<_{P_{22}}$ *"Strategy"*. Απ' ότι παρατηρούμε, $dom(C_1) \cap dom(C_2) = \varnothing$ και $dom(C_1) \cup dom(C_2) = dom(Category)$. Η προτίμηση $P_{23} := P_{21} \oplus P_{22}$ αποτελεί την προτίμηση γραμμικού αθροίσματος των P_{21} και P_{22} πάνω στο γνώρισμα $Category$. Η αντιστοίχηση της $P_{23} = (Category, <_{P_{23}})$ πάνω στο Σ, έχει ως αποτέλεσμα (μέσω του Ορισμού 4.18) τη δημιουργία της $P_{23}^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_{23}})$ πάνω στο $\Sigma[Category]$ = *{"Adventure", "Action-Adventure", "Manager", "Strategy", "Simulation"}*, της οποίας ο «καλύτερο-από» γράφος εμφανίζεται στην Εικόνα 4.35.□



Εικόνα 4.35 - Ο "καλύτερο-από" γράφος της $P_{23}^{\Sigma} = (\Sigma[Category], <_{P_{23}})$

4.1.2.1.3 Ιεραρχία των Κατασκευαστών Προτίμησης

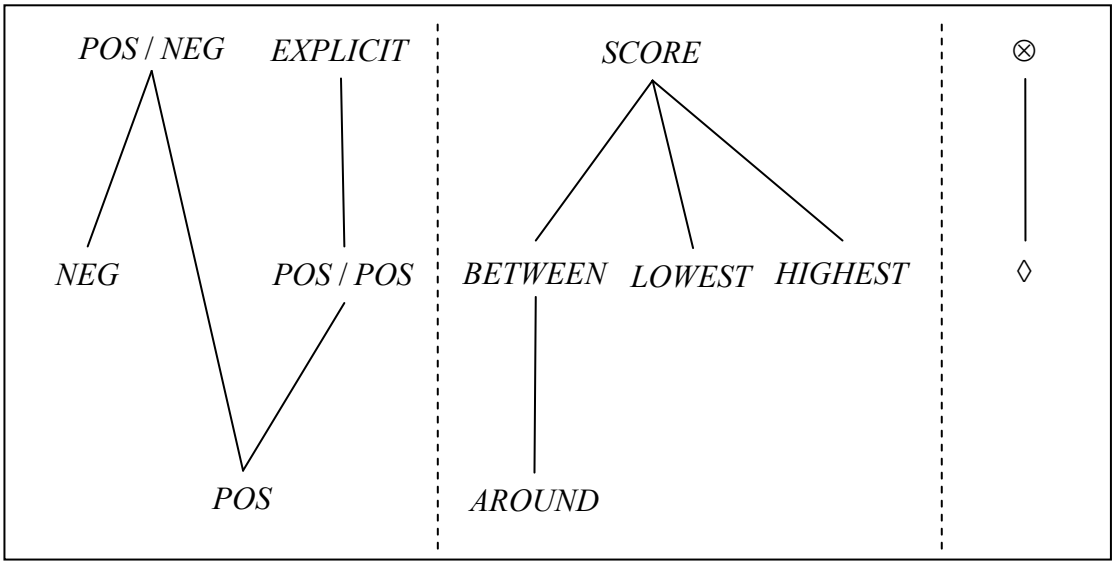
Με βάση τους ορισμούς των κατασκευαστών προτίμησης που παρουσιάστηκαν προηγουμένως, ο Kießling στο [19] παραθέτει μια μορφή *ιεραρχίας* των κατασκευαστών αυτών, η οποία βασίζεται στην έννοια *του υποκατασκευαστή προτίμησης (preference subconstructor)* που ορίζεται στο πλαίσιό του:

Ορισμός 4.35: *Δεδομένων δύο κατασκευαστών προτίμησης* k_1 *και* k_2*, ο* k_1 *θεωρείται ένας υποκατασκευαστής προτίμησης (preference subconstructor) του* k_2 *(*$k_1 < k_2$*), αν ο ορισμός του* k_1 *μπορεί να προκύψει από τον ορισμό του* k_2 *με βάση ειδικούς περιορισμούς.* □

Παράδειγμα 4.31: Έστω οι κατασκευαστές προτίμησης POS (Ορισμός 4.19) και POS/POS (Ορισμός 4.22). Απ’ ότι παρατηρούμε, αν στον Ορισμό 4.22 θέσουμε τον περιορισμό $POS2set = \emptyset$, τότε ο ορισμός του POS/POS ανάγεται στον ορισμό του POS. Οπότε $POS < POS/POS$. □

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω μεθοδολογία (ενδεικτικό μέρος της οποίας παρουσιάστηκε στο Παράδειγμα 4.31), ο Kießling καταλήγει στην ιεραρχική ταξινόμηση που παρουσιάζεται ως μη κατευθυνόμενος γράφος στην Εικόνα

4.36, η οποία και διαχωρίζεται σε τρία μέρη, ανάλογα με την κατηγορία των κατασκευαστών προτίμησης που ταξινομούνται (κατασκευαστές βασικών μη αριθμητικών προτιμήσεων, κατασκευαστές βασικών αριθμητικών προτιμήσεων και κατασκευαστές σύνθετων προτιμήσεων). Μέσω του γράφου αυτού, *κάθε κατασκευαστής προτίμησης* k *που συνδέεται μέσω μονοπατιού μιας ή περισσότερων ανοδικών ακμών με έναν κατασκευαστή προτίμησης* k'*, αποτελεί υποκατασκευαστή προτίμησης του* k' *(*$k < k'$*).*



Εικόνα 4.36 - Η ιεραρχία των κατασκευαστών προτίμησης του Kießling

Απ' ότι παρατηρούμε, η ιεραρχική ταξινόμηση των κατασκευαστών προτίμησης στην Εικόνα 4.36 ελαχιστοποιεί σε αρκετά μεγάλο βαθμό το σύνολο των κατασκευαστών που μπορούν να καθορίσουν *πλήρως* το θεωρητικό πλαίσιο του Kießling, εφόσον κάθε βασική μη αριθμητική προτίμηση μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια POS/NEG ή $EXPLICIT$ προτίμηση, κάθε βασική αριθμητική προτίμηση μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια $SCORE$ προτίμηση, καθώς και όλες οι προτιμήσεις τομής αποτελούν περιπτώσεις προτιμήσεων κατά Pareto.

4.1.2.1.4 Ιδιότητες των Κατασκευαστών Σύνθετων Προτιμήσεων

Έχοντας παρουσιάσει το σύνολο των κατασκευαστών σύνθετων προτιμήσεων στο πλαίσιο του Kießling, μπορούμε, όπως κάναμε και στο πλαίσιο του Chomicki, να μελετήσουμε μέσω των ορισμών τους το κατά πόσο

χαρακτηρίζονται ή όχι από συγκεκριμένες ιδιότητες, όπως είναι η αντιμεταθετικότητα (commutativity), η προσεταιριστικότητα (associativity) και η επιμεριστικότητα (distributivity) ως προς άλλο κατασκευαστή[8]. Λόγω της ύπαρξης *περιορισμών* σε αρκετούς από τους παραπάνω ορισμούς, το πεδίο της μελέτης αυτής μειώνεται, καθότι σε πολλές περιπτώσεις οι μαθηματικές αναπαραστάσεις που αντιστοιχούν στις τρεις ιδιότητες προς εξέταση *δεν μπορούν να εφαρμοστούν μέσω των περιορισμών αυτών.* Ενδεικτικά, αναφέρουμε ότι:

a) Η σύνθετη αριθμητική προτίμηση (Ορισμός 4.31) δημιουργείται *μόνο* μέσω $SCORE$ προτιμήσεων, οπότε η εφαρμογή της προσεταιριστικότητας του $rank_F$, της επιμεριστικότητας του $rank_F$ ως προς άλλο κατασκευαστή, αλλά και της επιμεριστικότητας άλλου κατασκευαστή ως προς τον $rank_F$, είναι αδύνατη, εφόσον είναι προφανές ότι στις αντίστοιχες μαθηματικές αναπαραστάσεις των παραπάνω ιδιοτήτων, υπάρχουν προτιμήσεις-συνιστώσες του $rank_F$ που *δεν αποτελούν* $SCORE$ προτιμήσεις.

b) Οι περιορισμοί που υπάρχουν για τη φύση των συνιστωσών προτιμήσεων στις σύνθετες προτιμήσεις της ξένης ένωσης (Ορισμός 4.33) και του γραμμικού αθροίσματος (Ορισμός 4.34), συντελούν στην αδυναμία της εφαρμογής της επιμεριστικότητας των κατασκευαστών $+$ και $\oplus$ ως προς άλλους κατασκευαστές, καθώς και άλλων κατασκευαστών ως προς αυτούς.

c) Ο περιορισμός της έκφρασης των δύο συνιστωσών προτιμήσεων πάνω *στο ίδιο* σύνολο ονομάτων γνωρισμάτων, ο οποίος και χαρακτηρίζει τη σύνθετη προτίμηση τομής (Ορισμός 4.32), έχει ως αποτελέσμα την αδυναμία της εφαρμογής της επιμεριστικότητας του κατασκευαστή $\Diamond$ ως προς τους άλλους κατασκευαστές. Ωστόσο, *είναι δυνατό* να μελετηθεί η επιμεριστικότητα των κατασκευαστών $\otimes$ και $\&$ ως προς τον $\Diamond$.

[8] Ο Kießling στο [19] παραθέτει μια αντίστοιχη πρόταση (proposition), η οποία, όμως, σχετίζεται *μόνο* με την αντιμεταθικότητα και την προσεταιριστικότητα των κατασκευαστών σύνθετων προτιμήσεων, *εκτός* από τον $rank_F$.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, το τελικό πεδίο ελέγχου, όσον αφορά τις τρεις ιδιότητες που μας ενδιαφέρουν, μεταφράζεται στο πλαίσιο του Kießling ως εξής:

a) Αντιμεταθετικότητα:
   i. Κατασκευαστές $\otimes$ και $\&$: Αν για δύο οποιεσδήποτε προτιμήσεις P και P', $P\theta P' \equiv P'\theta P$, όπου $\theta \in \{\otimes,\&\}$.
   ii. Κατασκευαστής $rank_F$: Αν για δύο οποιεσδήποτε $SCORE$ προτιμήσεις P, P' και οποιαδήποτε συνάρτηση συνδυασμού $F : \Re \times \Re \to \Re$, $rank_F(P,P') \equiv rank_F(P',P)$.
   iii. Κατασκευαστής $\Diamond$: Αν για δύο οποιεσδήποτε προτιμήσεις P, P' πάνω στο ίδιο σύνολο ονομάτων γνωρισμάτων, $P\Diamond P' \equiv P'\Diamond P$.
   iv. Κατασκευαστής $+$: Αν για δύο οποιεσδήποτε προτιμήσεις P, P' που υπακούουν στους περιορισμούς του Ορισμού 4.33, $P + P' \equiv P' + P$.
   v. Κατασκευαστής $\oplus$: Αν για δύο οποιεσδήποτε προτιμήσεις P, P' που υπακούουν στους περιορισμούς του Ορισμού 4.34, $P \oplus P' \equiv P' \oplus P$.

b) Προσεταιριστικότητα:
   i. Κατασκευαστές $\otimes$ και $\&$: Αν για τρεις οποιεσδήποτε προτιμήσεις P, P' και P'', $P\theta(P'\theta P'') \equiv (P\theta P')\theta P''$, όπου $\theta \in \{\otimes,\&\}$.
   ii. Κατασκευαστής $\Diamond$: Αν για τρεις οποιεσδήποτε προτιμήσεις P, P' και P'' πάνω στο ίδιο σύνολο ονομάτων γνωρισμάτων, $P\Diamond(P'\Diamond P'') \equiv (P\Diamond P')\Diamond P''$.
   iii. Κατασκευαστής $+$: Αν για τρεις οποιεσδήποτε προτιμήσεις P, P' και P'' που υπακούουν στους περιορισμούς του Ορισμού 4.33, $P + (P' + P'') \equiv (P + P') + P''$.
   iv. Κατασκευαστής $+$: Αν για τρεις οποιεσδήποτε προτιμήσεις P, P' και P'' που υπακούουν στους περιορισμούς του Ορισμού 4.34, $P \oplus (P' \oplus P'') \equiv (P \oplus P') \oplus P''$.

c) Επιμεριστικότητα ως προς άλλο κατασκευαστή-τελεστή:

i. Μεταξύ κατασκευαστών $\otimes$ και $\&$: Αν για τρεις οποιεσδήποτε προτιμήσεις P, P' και P'', $P\theta(P'\theta'P'') \equiv (P\theta P')\theta'(P\theta P'')$, όπου $\theta \in \{\otimes,\&\}$ και $\theta' \in \{\otimes,\&\}/\theta$.

ii. Κατασκευαστές $\otimes$ και $\&$ ως προς $\Diamond$: Αν για τρεις οποιεσδήποτε προτιμήσεις P, P' και P'', με τις P', P'' εκφρασμένες πάνω στο ίδιο σύνολο ονομάτων γνωρισμάτων, $P\theta(P'\Diamond P'') \equiv (P\theta P')\Diamond(P\theta P'')$, όπου $\theta \in \{\otimes,\&\}$.

Ο Πίνακας 4.3 παρουσιάζει συγκεντρωτικά τα συμπεράσματα της μελέτης μας για τους κατασκευαστές σύνθετων προτιμήσεων του πλαισίου του Kießling.

Κατασκευαστής	**Αντιμεταθετικός**	**Προσεταιριστικός**	**Επιμεριστικός ως προς**
$\otimes$	Ναι	Ναι	$\Diamond$
$\&$	Όχι	Ναι	$\otimes$, $\Diamond$
$rank_F$	Όχι	Όχι	Κανένα
$\Diamond$	Ναι	Ναι	Κανένα
$+$	Ναι	Ναι	Κανένα
$\oplus$	Όχι	Ναι	Κανένα

Πίνακας 4.3 - Οι ιδιότητες των κατασκευαστών σύνθετων προτιμήσεων του Kießling

Απ' ότι παρατηρούμε, οι κατασκευαστές $\otimes$ και $+$ είναι αντιμεταθετικοί και προσεταιριστικοί, καθώς και οι κατασκευαστές $\&$ και $\oplus$ είναι προσεταιριστικοί και *δεν είναι* αντιμεταθετικοί, κάτι το οποίο έπρεπε να περιμένουμε, εφόσον:

a) Ο κατασκευαστής $\otimes$ αποτελεί, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, εφαρμογή του ορισμού της διάταξης μέσω συντεταγμένων (Ορισμός 2.10) πάνω σε αυστηρές μερικές διατάξεις και, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, η διάταξη μέσω συντεταγμένων είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.

b) Ο κατασκευαστής $+$ αποτελεί, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, εφαρμογή του ορισμού της ξένης ένωσης (Ορισμός 2.12) πάνω σε αυστηρές μερικές διατάξεις και, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, η ξένη ένωση είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.

c) Ο κατασκευαστής & αποτελεί, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, εφαρμογή του ορισμού της λεξικογραφικής διάταξης (Ορισμός 2.11) πάνω σε αυστηρές μερικές διατάξεις και, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, η λεξικογραφική διάταξη είναι προσεταιριστική και δεν είναι αντιμεταθετική.

d) Ο κατασκευαστής ⊕ αποτελεί, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, εφαρμογή του ορισμού του γραμμικού αθροίσματος (Ορισμός 2.13) πάνω σε αυστηρές μερικές διατάξεις και, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, το γραμμικό άθροισμα είναι προσεταιριστικό και δεν είναι αντιμεταθετικό.

Επίσης, διακρίνουμε ότι ο κατασκευαστής & είναι επιμεριστικός ως προς τον ⊗, καθώς και ως προς τον ◊, πράγμα το οποίο είναι εύλογο, εφόσον, όπως είδαμε στην Εικόνα 4.36, ο κατασκευαστής ◊ αποτελεί υποκατασκευαστή (Ορισμός 4.35) του ⊗.

4.1.2.2 Επερωτήσεις Μέσω Προτιμήσεων

Όπως στο πλαίσιο του Chomicki, έτσι και ο Kießling καθορίζει την έννοια της *επερώτησης προτίμησης (preference query)* στο πλαίσιό του, σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.36: *Δεδομένης μιας προτίμησης* $P = (A, <_P)$ *και μιας αντίστοιχης προτίμησης βάσης δεδομένων* $P^{DBset} = (DBset[A], <_P)$, *όπου* $DBset[A] \subseteq dom(A)$, *η επερώτηση* $\sigma[P](DBset) = \{t \in DBset \mid t[A] \in \max(P^{DBset})\}$ *αποτελεί μια επερώτηση προτίμησης.* □

Απ' ότι βλέπουμε, όσον αφορά το σχεσιακό μοντέλο δεδομένων, ο Ορισμός 4.36 είναι *παρόμοιος* με τον ορισμό του τελεστή διαλογής στο πλαίσιο του Chomicki (Ορισμός 4.9), εφόσον και οι δύο ουσιαστικά *επιστρέφουν τις καλύτερες πλειάδες του εκάστοτε στιγμιότυπου ενός σχεσιακού πίνακα με βάση τη δηλωμένη προτίμηση.*

Παράδειγμα 4.32: Υποθέτουμε το στιγμιότυπο Σ του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)* της Εικόνας 4.1, καθώς και την προτίμηση $P_{13} = (\{Year, \Pr ice - in - Euro\}, <_{P_{13}})$ μαζί με την αντίστοιχη προτίμηση βάσης δεδομένων $P_{13}^{\Sigma} = (\Sigma[\{Year, \Pr ice - in - Euro\}], <_{P_{13}})$ του Παραδείγματος 4.25. Μέσω του Ορισμού 4.36, η επερώτηση προτίμησης με βάση την P_{13} και το Σ είναι η $\sigma[P_{13}](\Sigma) = \{t \in \Sigma \mid t[\{Year, \Pr ice - in - Euro\}] \in \max(P_{13}^{\Sigma})\}$. Παρατηρώντας τον «καλύτερο-από» γράφο της P_{13}^{Σ} στην Εικόνα 4.30, συμπεραίνουμε ότι $\max(P_{13}^{\Sigma}) = \{\{2000,21.50\},\{2003,20.95\},\{2004,25.30\}\}$, οπότε για την επερώτηση $\sigma[P_{13}](\Sigma)$ έχουμε $\sigma[P_{13}](\Sigma) = \{t_2, t_3, t_8, t_9\}$, της οποίας το αποτέλεσμα εμφανίζεται στην Εικόνα 4.37. □

Name	Category	Year	Price-in-Euro
FlightSim3	Simulation	2000	21.50
CM2004	Manager	2004	25.30
TotalClubManager	Manager	2003	20.95
RiseOfNations	Strategy	2000	21.50

Εικόνα 4.37 - Το αποτέλεσμα της επερώτησης $\sigma[P_{13}](\Sigma)$

Αν και, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η σημασιολογία των πλαισίων του Chomicki και του Kießling στον καθορισμό των καλύτερων αντικειμένων είναι πανομοιότυπη, ωστόσο, η έννοια της επερώτησης προτίμησης στον Kießling καθορίζεται με *πιο αυστηρό τρόπο.* Όπως είδαμε στον Ορισμό 4.10 και στο Παράδειγμα 4.11, μια επερώτηση προτίμησης στο πλαίσιο του Chomicki *μπορεί να επιστέψει και πλειάδες που δεν αποτελούν τις καλύτερες πλειάδες του στιγμιότυπου μέσω της δηλωμένης προτίμησης*, πράγμα το οποίο *δεν μπορεί να γίνει* στο πλαίσιο του Kießling, εφόσον, μέσω του Ορισμού 4.36, κάθε ορισμένη επερώτηση προτίμησης επιστρέφει *μόνο τις πλειάδες του στιγμιότυπου που περιέχουν τις καλύτερες τιμές των γνωρισμάτων με βάση τη δηλωμένη προτίμηση πάνω στα γνωρίσματα αυτά (οπότε και αποτελούν τις καλύτερες πλειάδες).* Αυτό είναι και το κύριο χαρακτηριστικό του μοντέλου επερωτήσεων του πλαισίου του Kießling, στο

οποίο *τα εκάστοτε αντικείμενα που δεν περιέχουν τις καλύτερες τιμές απορρίπτονται άμεσα ("discarded on the fly")*. Για το λόγο αυτό, ο Kießling το ονομάζει *"Best Matches Only" (BMO)* μοντέλο επερωτήσεων.

4.1.2.3 Αδυναμίες της Προσέγγισης

Όπως παρατηρούμε από τις προηγούμενες ενότητες, το πλαίσιο του Kießling αποτελεί προσέγγιση με αρκετά μεγάλη εκφραστικότητα, το οποίο και επωφελείται πλήρως της Θεωρίας Διατάξεων για τον ορισμό προτιμήσεων ως αυστηρές μερικές διατάξεις, καθώς και τη σύνθεση αυτών για τη δημιουργία νέων προτιμήσεων. Ωστόσο, το πλαίσιο αυτό εμφανίζει ένα σύνολο από αδυναμίες, οι οποίες και συνοψίζονται παρακάτω:

a) Η εκφραστική δυνατότητα των κατασκευαστών που ορίζονται για τη δήλωση των βασικών προτιμήσεων είναι, ως ένα βαθμό, περιορισμένη, εφόσον δεν είναι δυνατό να εκφραστεί μέσω των κατασκευαστών αυτών προτίμηση που να αφορά *μόνο ένα μέρος του πεδίου τιμών του συνόλου των ονομάτων γνωρισμάτων*. Π.χ., λαμβάνοντας υπόψη το γνώρισμα *Category* του σχεσιακού πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)*, η δήλωση ενός χρήστη ότι προτιμά τα παιχνίδια διοίκησης (manager) από τα παιχνίδια περιπέτειας (adventure), *αδιαφορώντας* για τις υπόλοιπες κατηγορίες παιχνιδιών, δεν μπορεί να εκφραστεί από κανένα *κατασκευαστή βασικών προτιμήσεων* που είδαμε παραπάνω. Στο δικό μας πλαίσιο, η αίσθηση της *αδιαφορίας* του χρήστη για κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο μπορεί να αναπαρασταθεί με τη θεώρησή του ως *μη-ενεργό στοιχείο*.

b) Δεν ορίζονται με συγκεκριμένο τρόπο προτιμήσεις που περιέχουν κάποια συνθήκη ικανοποίησης (όπως οι προτιμήσεις υπό συνθήκη και ομαδοποίησης που αναφέρθηκαν στο πλαίσιο του Chomicki), οι οποίες και είναι αρκετά συνήθεις στην καθημερινότητά μας. Π.χ., λαμβάνοντας υπόψη τον σχεσιακό πίνακα *PCGames(Name, Category, Year, Price-in-Euro)*, η δήλωση ενός χρήστη ότι από τα παιχνίδια διοίκησης (manager) προτιμά τα πιο πρόσφατα χρονολογικά, *αδιαφορώντας* για τις υπόλοιπες κατηγορίες και χρονολογίες

έκδοσης παιχνιδιών, δεν μπορεί να εκφραστεί από κανένα ορισμό προτίμησης του πλαισίου του Kießling. Στη δική μας προσέγγιση, προτιμήσεις με συνθήκη ικανοποίησης μπορούν να επιτελεστούν είτε με τη θέσπιση τελεστή επιλογής μέσω του συναρτησιακού περιορισμού, είτε με τη χρήση της λεξικογραφικής διάταξης.

c) Οι συνθέσεις προτιμήσεων που το πλαίσιο αυτό προτείνει είναι *μόνο για συγκεκριμένους σκοπούς* (ad hoc), χωρίς τη δυνατότητα *περαιτέρω* επέκτασης, σε αντίθεση με το δικό μας πλαίσιο όπου και παρέχουμε μια *ολοκληρωμένη* μεθοδολογία για την ουσιώδη διαδικασία της σύνθεσης δύο ή περισσοτέρων προτιμήσεων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε σύνθεση προτιμήσεων στο μοντέλο μας βασίζεται σε δύο συγκεκριμένους άξονες: Στις (ατομικές) προτιμήσεις πάνω στα δεδομένα και στην προτίμηση πάνω στα χαρακτηριστικά.

d) Αν και το πλαίσιο του Kießling ειδικεύεται πάνω στο σχεσιακό και το XML μοντέλο δεδομένων, εν τούτοις περιορίζεται *μόνο* στο σχεσιακό, εφόσον οι προτιμήσεις που ορίζει στο XML μοντέλο *δεν σχετίζονται* με τη δομή της πληροφορίας που παρέχει το μοντέλο αυτό, παρά *μόνο* με τα εκάστοτε γνωρίσματα (attributes) που μπορεί να υπάρχουν. Από την άλλη πλευρά, το δικό μας μοντέλο είναι επεκτάσιμο σε οποιοδήποτε δομικό στοιχείο προσφέρει ένα μοντέλο δεδομένων και μπορεί να αναπαρασταθεί κάλλιστα στο σχεσιακό κόσμο.

e) Όπως και στον Chomicki, το πλαίσιο αυτό εστιάζει σε *καθορισμένους* και *επιλεκτικούς τύπους προτιμήσεων*, καθώς, επίσης, βασίζεται σε *εξειδικευμένες συνθέσεις* των προτιμήσεων αυτών, αποτελώντας, έτσι, ένα μοντέλο αναπαράστασης προτιμήσεων με *ανεπιθύμητους πλεονασμούς*. Από την άλλη πλευρά, το δικό μας πλαίσιο, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μοντελοποιεί την έννοια των προτιμήσεων της καθημερινής μας ζωής *χωρίς* τη χρήση περιττών υποθέσεων, μέσω της θεώρησής τους ως μερικές διατάξεις συνόλων και της παροχής μιας απλής διαδικασίας συνθέσεως των προτιμήσεων αυτών.

f) Σε ομοφωνία με το πλαίσιο του Chomicki, ο καθορισμός των καλύτερων αντικειμένων με βάση μια δηλωμένη προτίμηση γίνεται *μόνο* μέσω των μέγιστων στοιχείων, όπου τα αδιάφορα, μη-ενεργά στοιχεία *δεν διαχωρίζονται* από τα ενεργά και τοποθετούνται στις *καλύτερες απαντήσεις*. Στη δική μας προσέγγιση, η διαδικασία αυτή μπορεί να επιτελεστεί *και μέσω των ελάχιστων στοιχείων* (αλγόριθμος *TOWMin*), όπου, ανεξαρτήτως του αλγόριθμου που χρησιμοποιείται, η διάκριση μεταξύ ενεργών και μη-ενεργών στοιχείων αποτελεί πρωταρχική ενέργεια.

g) Μέσω των κατασκευαστών σύνθετων προτιμήσεων που προτείνονται, το πλαίσιο αυτό μπορεί να θεωρήσει *μόνο ολικές διατάξεις* στο επίπεδο των χαρακτηριστικών των αντικειμένων, οι οποίες και είναι εκφραστικά *πιο περιοριστικές* από τις μερικές διατάξεις που θεωρεί το δικό μας πλαίσιο στο επίπεδο αυτό.

Κεφάλαιο 5

Προτιμήσεις στο RDF Μοντέλο Δεδομένων

Στο Κεφάλαιο 3, παρουσιάσαμε και αναλύσαμε το θεωρητικό μας πλαίσιο για τη διάταξη των διαθέσιμων αντικειμένων μέσω μιας δηλωμένης προτίμησης πάνω στα χαρακτηριστικά τους, το οποίο βασίζεται στην χρήση *συναρτήσεων* για την αναπαράσταση των χαρακτηριστικών αυτών. Στο κεφάλαιο αυτό, σκοπός μας είναι να δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το πλαίσιο για τη διάταξη αντικειμένων τα οποία αναπαρίστανται σε ένα εκφραστικό μοντέλο δεδομένων, όπως είναι το *RDF μοντέλο δεδομένων*. Για τον λόγο αυτό, παραθέτουμε μια σύντομη εισαγωγή της γλώσσας RDF και του μοντέλου δεδομένων που αυτή παρέχει.

5.1 RDF (Resource Description Framework)

Το Πλαίσιο Περιγραφής Πόρων (Resource Description Framework ή RDF) [24] αποτελεί μια γλώσσα για την περιγραφή, επεξεργασία και ανταλλαγή μετα-δεδομένων (metadata) στον Παγκόσμιο Ιστό, η οποία καλύπτει τις ανάγκες πολλών διαφορετικών εφαρμογών, όπως, π.χ., η ανακάλυψη πόρων (resource discovery), η καταλογοποίηση (cataloging) και η περιγραφή νοημόνων πρακτόρων λογισμικού (intelligent software agents).

Το μοντέλο δεδομένων της RDF (RDF Data Model) [24] αποτελεί ένα μοντέλο περιγραφής των πόρων του Ιστού, καθώς και των σχέσεων μεταξύ τους, το οποίο και είναι *ανεξάρτητο* από τα πεδία ενδιαφέροντος (domain-independent) των εκάστοτε εφαρμογών του Ιστού. Συγκεκριμένα, χαρακτηρίζεται από τρεις τύπους αντικειμένων:

- **Πόροι (RDF Resources):** Όλα τα πράγματα που περιγράφονται από εκφράσεις σε RDF ονομάζονται πόροι. Ένας πόρος μπορεί να προσπελαύνεται από τον Ιστό άμεσα, όπως, π.χ., συμβαίνει με μια ηλεκτρονική σελίδα, ή έμμεσα, όπως, π.χ., συμβαίνει με ένα τυπωμένο βιβλίο. Καθένας από τους πόρους αυτούς χαρακτηρίζεται

ένα συγκεκριμένο και *μοναδικό* Καθολικό Αναγνωριστικό Πόρου (Uniform Resource Identifier ή URI) [4].

- **Ιδιότητες (RDF Properties):** Αποτελούν ειδικές περιπτώσεις RDF πόρων. Μια ιδιότητα είναι ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό, γνώρισμα, ή σχέση που χρησιμοποιείται για την περιγραφή ενός πόρου. Κάθε τέτοια ιδιότητα έχει συγκεκριμένη σημασία, καθώς επίσης, όπως θα δούμε στη συνέχεια, ορίζει τις επιτρεπτές τιμές της, τους τύπους των πόρων που περιγράφει και την πιθανή σχέση της με άλλες ιδιότητες.
- **Δηλώσεις (RDF Statements):** Μια δήλωση αποτελείται από έναν συγκεκριμένο πόρο (resource) μαζί με μια ονομασμένη ιδιότητα (named property), συν την τιμή της ιδιότητας αυτής (property value) για τον παραπάνω πόρο. Τα τρία αυτά ξεχωριστά μέρη μιας δήλωσης ονομάζονται αντίστοιχα *υποκείμενο (subject)*, *κατηγόρημα (predicate)* και *αντικείμενο (object)* της δήλωσης αυτής. Το αντικείμενο μιας δήλωσης μπορεί να είναι ένας πόρος ή *μια λεκτική σταθερά (literal)*, δηλαδή είτε ένα απλό αλφαριθμητικό (string), είτε στιγμιότυπο κάποιου πρωταρχικού τύπου δεδομένων (primitive data type), όπως, π.χ., είναι οι ακέραιοι, οι δεκαδικοί, οι ημερομηνίες σε ISO πρότυπο, κτλ. Κάθε δήλωση χαρακτηρίζεται *μοναδικά* από τα τρία παραπάνω ξεχωριστά της μέρη, οπότε και μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια τριπλέτα *(pred, sub, obj)*, όπου *pred* το κατηγόρημα, *sub* το υποκείμενο και *obj* το αντικείμενο της δήλωσης αυτής.

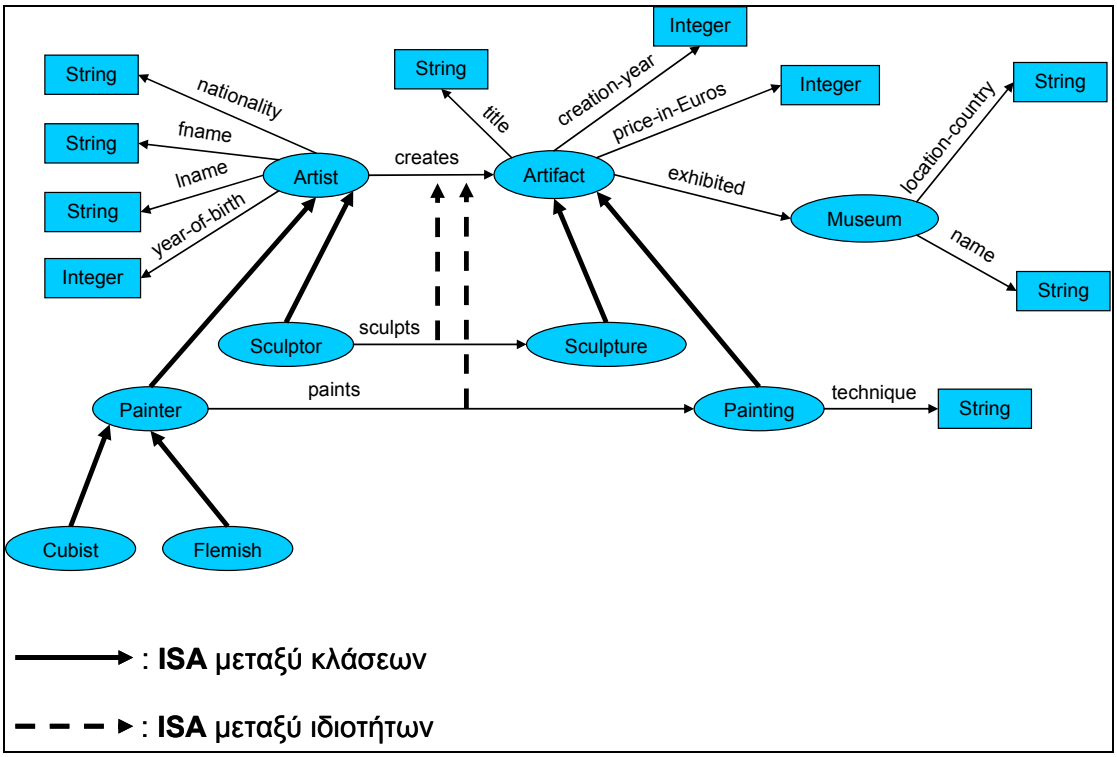
Για την επεξεργασία και ανταλλαγή RDF μετα-δεδομένων μεταξύ και διαμέσου των ποικίλων κοινοτήτων χρηστών και εφαρμογών στον Παγκόσμιο Ιστό, η RDF ορίζει κατάλληλα λεξιλόγια (vocabularies) για τη δημιουργία κοινώς αποδεκτών περιγραφών πόρων (RDF Resource Descriptions). Τα λεξιλόγια αυτά αποτελούν επεκτάσεις του RDF μοντέλου δεδομένων και είναι γνωστά ως RDF Σχήματα [6]. Ένα RDF Σχήμα (RDF Schema ή RDF/S) αποτελείται από:

- **Κλάσεις (Classes):** Οι κλάσεις αποτελούν τα *είδη* των πραγμάτων (kinds of things) που περιγράφονται στο RDF Σχήμα. Η έννοιά τους

είναι συνυφασμένη με την έννοια των κλάσεων στις γλώσσες του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού, όπως, π.χ., στη Java. Οι κλάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να περιγράψουν οποιαδήποτε τύπο ή κατηγορία πραγμάτων του γνωστού μας κόσμου, όπως είναι οι ηλεκτρονικές σελίδες, οι άνθρωποι, καθώς και αφαιρετικές έννοιες. Πόροι που ανήκουν σε μια συγκεκριμένη κλάση ενός RDF Σχήματος ονομάζονται στιγμιότυπα (instances) της κλάσης αυτής.

- **Τύπους Λεκτικών Σταθερών (Literals):** Όπως είδαμε παραπάνω, οι τύποι λεκτικών σταθερών, αποτελούν απλούς και πρωταρχικούς τύπους δεδομένων, όπως είναι τα αλφαριθμητικά, οι ακέραιοι, οι δεκαδικοί κ.τ.λ.
- **Ιδιότητες των Κλάσεων (Class Properties):** Οι ιδιότητες αυτές περιγράφουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των κλάσεων του RDF Σχήματος. Κάθε τέτοια ιδιότητα προσδιορίζεται από δύο συγκεκριμένα πεδία: Το πεδίο ορισμού (domain), το οποίο αποτελεί την κλάση του RDF Σχήματος που περιγράφει η ιδιότητα αυτή, και το πεδίο τιμών (range), στο οποίο και ανήκουν οι επιτρεπτές τιμές της. Το πεδίο τιμών μιας ιδιότητας μπορεί να αποτελεί μια κλάση του RDF Σχήματος ή ένας τύπος λεκτικών σταθερών.
- **ISA Ιεραρχίες μεταξύ Κλάσεων/Ιδιοτήτων (Class/Property ISA Hierarchies):** Σε ένα RDF Σχήμα, είναι δυνατή η δήλωση (μέσω συγκεκριμένων ιδιοτήτων της RDF) ότι μια κλάση αποτελεί *υποκλάση (subclass)* μιας άλλης κλάσης, καθώς επίσης κι ότι μια ιδιότητα αποτελεί *υποιδιότητα (sybproperty)* μιας άλλης ιδιότητας του σχήματος. Με αυτόν τον τρόπο, δημιουργούνται σχέσεις ISA μεταξύ των κλάσεων και των ιδιοτήτων, οι οποίες και μας οδηγούν σε αντίστοιχες ISA ιεραρχίες στο σχήμα αυτό. Όπως συμβαίνει και με γλώσσες του αντικειμενοστραφούς προγραμματισμού, οι υποκλάσεις μιας κλάσης του σχήματος *κληρονομούν τη συμπεριφορά της*, π.χ., οι ιδιότητες που ορίζονται στο σχήμα για αυτήν, ορίζονται και για τις υποκλάσεις της.

Η Εικόνα 5.1 παρουσιάζει τη γραφική αναπαράσταση ένα απλού ενδεικτικού RDF Σχήματος για την περιγραφή καλλιτεχνών *(Artists)*, έργων τέχνης *(Artifacts)* και μουσείων *(Museums)*. Στην αναπαράσταση αυτή, κάθε κλάση του σχήματος αναπαρίσταται ως κόμβος-έλλειψη με ετικέτα το αντίστοιχο όνομά της, καθώς και κάθε τύπος λεκτικών σταθερών αναπαρίσταται ως κόμβος-ορθογώνιο με ετικέτα τον αντίστοιχο τύπο του. Επίσης, κάθε ιδιότητα του σχήματος αναπαρίσταται ως μια ακμή με ετικέτα το όνομά της, κόμβο αποστολής την κλάση που αποτελεί το πεδίο ορισμού της (domain) και κόμβο προορισμού την κλάση ή τον τύπο λεκτικών σταθερών που αποτελεί το πεδίο τιμών της (range). Τέλος, οι ISA σχέσεις μεταξύ των κλάσεων και των ιδιοτήτων του σχήματος αναπαρίστανται ως πλατιά βέλη, όπου στην περίπτωση των ιδιοτήτων τα βέλη αυτά είναι διακεκομμένα.



Εικόνα 5.1 – Ένα ενδεικτικό RDF Σχήμα

Δεδομένου ενός RDF Σχήματος, μπορούμε να δημιουργήσουμε αντίστοιχες RDF περιγραφές πόρων (RDF Resource Descriptions) με βάση το σχήμα αυτό, το σύνολο των οποίων αποτελεί ένα στιγμιότυπο (instance) του σχήματος. Για την εγκυρότητα (validity) του στιγμιότυπου αυτού, πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω περιορισμοί:

a) Κάθε πόρος του στιγμιότυπου αποτελεί στιγμιότυπο μιας *τουλάχιστον* από τις κλάσεις του σχήματος. Δεδομένης της ISA ιεραρχίας μεταξύ των κλάσεων που μπορεί να υπάρχει, στην περίπτωση που μια από τις κλάσεις αυτές είναι υποκλάση μιας άλλης κλάσης του σχήματος, *τότε ο πόρος είναι στιγμιότυπο και αυτής της κλάσης*.
b) Κάθε ιδιότητα του στιγμιότυπου αποτελεί στιγμιότυπο μιας από τις ιδιότητες του σχήματος.
c) Για κάθε δήλωση *(sub, pred, obj)* που ανήκει στο στιγμιότυπο αυτό, το κατηγόρημα (*pred*) αποτελεί στιγμιότυπο μιας ιδιότητας του σχήματος, το υποκείμενο (*sub*) αποτελεί στιγμιότυπο της κλάσης που αποτελεί το πεδίο ορισμού (domain) της ιδιότητας αυτής και το αντικείμενο (*obj*):
    i. Αν το πεδίο τιμών (range) της ιδιότητας αυτής είναι μια κλάση του σχήματος, τότε αποτελεί στιγμιότυπο αυτής της κλάσης, αλλιώς,
    ii. Αν το πεδίο τιμών (range) της ιδιότητας αυτής είναι ένας τύπος λεκτικών σταθερών, τότε αποτελεί μια τιμή αυτού του τύπου.

Η Εικόνα 5.2 παρουσιάζει τον RDF γράφο [21] ενός έγκυρου στιγμιότυπου του RDF Σχήματος στην Εικόνα 5.1, τα οποία και θα αποτελέσουν το παράδειγμά μας για την δήλωση προτιμήσεων στη συνέχεια. Οι πόροι/στιγμιότυπα αναπαρίστανται ως ελλείψεις με ετικέτες $\&r1,...,\&r23$, οι οποίες υποδηλώνουν *συγκεκριμένα και μοναδικά URIs*. Επίσης, οι λεκτικές σταθερές του στιγμιότυπου αναπαρίστανται ως ορθογώνια με ετικέτα την αντίστοιχη τιμή τους, καθώς και η αναπαράσταση των ιδιοτήτων είναι αντίστοιχη με αυτήν του RDF Σχήματος, όπου η κάθε ιδιότητα-στιγμιότυπο μιας ιδιότητας του σχήματος στην Εικόνα 5.1 φέρει το όνομα της ιδιότητας αυτής. Για τους πόρους $\&r1,...,\&r23$ του στιγμιότυπου έχουμε ότι:

a) Ο πόρος $\&r1$ αποτελεί στιγμιότυπο της κλάσης *Cubist* (οπότε, μέσω της ISA ιεραρχίας των κλάσεων *Artist*, *Painter* και *Cubist* αποτελεί και στιγμιότυπο των κλάσεων *Painter* και *Artist*)

b) Ο πόρος $\&r9$ αποτελεί στιγμιότυπο της κλάσης *Flemish* (οπότε, μέσω της ISA ιεραρχίας των κλάσεων *Artist*, *Painter* και *Flemish* αποτελεί και στιγμιότυπο των κλάσεων *Painter* και *Artist*)

c) Οι πόρος $\&r14$ αποτελεί στιγμιότυπο της κλάσης *Painter* (οπότε, μέσω της ISA ιεραρχίας των κλάσεων *Artist* και *Painter* αποτελεί και στιγμιότυπο της κλάσης *Artist*)

d) Ο πόρος $\&r5$ αποτελεί στιγμιότυπο της κλάσης *Sculptor* (οπότε, μέσω της ISA ιεραρχίας των κλάσεων *Artist* και *Sculptor* αποτελεί και στιγμιότυπο της κλάσης *Artist*)

e) Οι πόρος $\&r21$ αποτελεί στιγμιότυπο της κλάσης *Painter*, *καθώς και της κλάσης Sculptor* (οπότε, μέσω της ISA ιεραρχίας των κλάσεων *Artist*, *Painter* και *Sculptor*, αποτελεί και στιγμιότυπο της κλάσης *Artist*)

f) Οι πόροι $\&r12$ και $\&r19$ αποτελούν στιγμιότυπα της κλάσης *Artist*

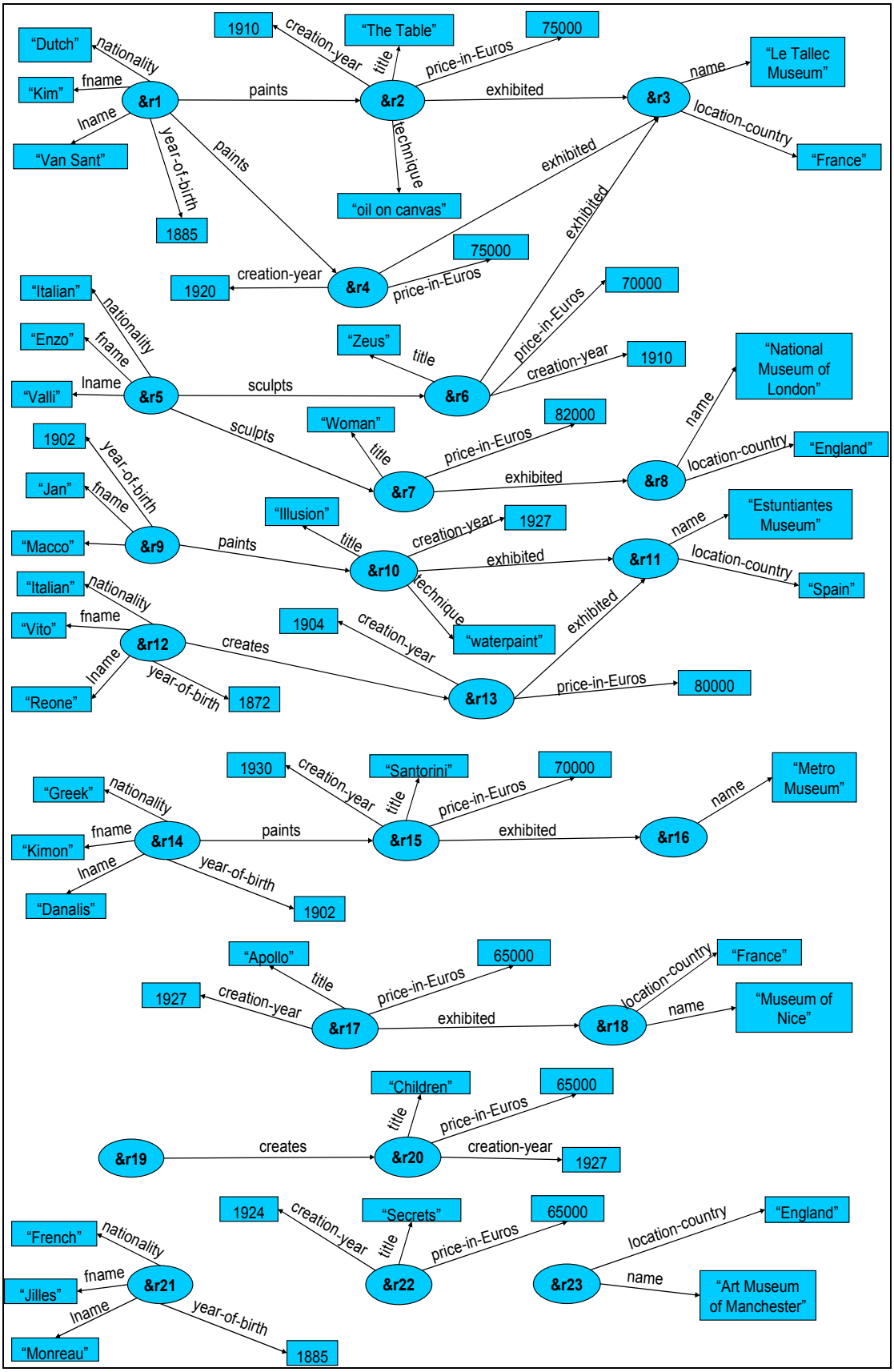
g) Οι πόροι $\&r2$, $\&r4$, $\&r10$ και $\&r15$ αποτελούν στιγμιότυπα της κλάσης *Painting* (οπότε, μέσω της ISA ιεραρχίας των κλάσεων *Artifact* και *Painting* αποτελούν και στιγμιότυπα της κλάσης *Artifact*)

h) Οι πόροι $\&r6$, $\&r7$ και $\&r17$ αποτελούν στιγμιότυπα της κλάσης *Sculpture* (οπότε, μέσω της ISA ιεραρχίας των κλάσεων *Artifact* και *Sculpture* αποτελούν και στιγμιότυπα της κλάσης *Artifact*)

i) Οι πόροι $\&r13$, $\&r20$ και $\&r22$ αποτελούν στιγμιότυπα της κλάσης *Artifact*, και

j) Οι πόροι $\&r3$, $\&r8$, $\&r11$, $\&r16$, $\&r18$ και $\&r23$ αποτελούν στιγμιότυπα της κλάσης *Museum*.

Όπως βλέπουμε, είναι δυνατό ένα στιγμιότυπο μιας κλάσης του σχήματος να *μην χαρακτηρίζεται από όλες τις ιδιότητες που ορίζονται για αυτή*, π.χ., το στιγμιότυπο $\&r13$ της κλάσης *Artifact* δεν χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα *title* που έχει οριστεί για αυτή την κλάση.



Εικόνα 5.2 - Ένα έγκυρο RDF στιγμιότυπο του RDF Σχήματος της Εικόνας 5.1

Μέσω της αναπαράστασης της πληροφορίας με βάση το RDF Μοντέλο Δεδομένων, η φύση των προτιμήσεων που μπορεί να εκφράσει ένας χρήστης στο μοντέλο αυτό μπορεί να ποικίλει, *ανάλογα σε ποιο κομμάτι πληροφορίας αναφέρεται η εκάστοτε προτίμηση, καθώς και τη δομή πληροφορίας που χρησιμοποιείται για την αντίστοιχη διάταξη*. Μέσα από αυτό το σύνολο των διαφορετικών ειδών προτιμήσεων που μπορούν να δηλωθούν, το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται σε τρία συγκεκριμένα παραδείγματα:

a) *Προτιμήσεις πάνω στους πόρους/στιγμιότυπα μιας συγκεκριμένης κλάσης του RDF Σχήματος, με βάση τις τιμές τους μέσω των ιδιοτήτων/γνωρισμάτων που χαρακτηρίζουν την παραπάνω κλάση.* Π.χ., με βάση το RDF Σχήμα στην Εικόνα 5.1 και το RDF στιγμιότυπό του στην Εικόνα 5.2, μια τέτοια προτίμηση είναι η ακόλουθη: *«Από τους καλλιτέχνες (Artists) προτιμώ αυτούς που κατάγονται από την Ιταλία και, εξίσου, αυτούς που έχουν γεννηθεί πιο πρόσφατα».*

b) *Προτιμήσεις πάνω σε μονοπάτια ίδιου μήκους του RDF στιγμιότυπου που χαρακτηρίζονται από την ίδια ακολουθία ιδιοτήτων, με βάση τους πόρους που περιέχουν, καθώς και τις τιμές των πόρων αυτών μέσω των ιδιοτήτων/γνωρισμάτων των αντίστοιχων κλάσεων όπου ανήκουν.* Π.χ., με βάση το RDF Σχήμα στην Εικόνα 5.1 και το RDF στιγμιότυπό του στην Εικόνα 5.2, μια τέτοια προτίμηση είναι η ακόλουθη: *«Από τα μονοπάτια* $Painter \xrightarrow{paints} Painting \xrightarrow{exhibited} Museum$*, προτιμώ αυτά με μουσείο το* $\&r3$ *και η καταγωγή του ζωγράφου να είναι ολλανδική, θεωρώντας, όμως, σημαντικότερη την καταγωγή του ζωγράφου».*

c) *Προτιμήσεις που σχετίζονται με την κατηγοριοποίηση (classification) των πόρων/κόμβων του RDF στιγμιότυπου στις κλάσεις του RDF Σχήματος μέσω της RDF ιδιότητας typeOf, με βάση τις ISA σχέσεις μεταξύ των κλάσεων που μπορεί να υπάρχουν στο σχήμα*. Π.χ., για το RDF Σχήμα στην Εικόνα 5.1 και το RDF στιγμιότυπό του στην Εικόνα 5.2, μια τέτοια προτίμηση είναι η ακόλουθη: *«Από τα έργα τέχνης (Artifacts), προτιμώ αυτά των οποίων η κατηγοριοποίηση να είναι όσο το δυνατόν γενικότερη, δηλαδή η αντίστοιχη κλάση που*

ανήκουν να βρίσκεται όσο το δυνατόν ψηλότερα στην ISA ιεραρχία της κλάσης Artifact».

5.2 Αναπαράσταση RDF Μοντέλου Μέσω Συναρτήσεων

Έχοντας εισαγάγει τις βασικές δομές της πληροφορίας που αναπαριστά το RDF μοντέλο δεδομένων και παρουσιάζοντας τα παραδείγματα των προτιμήσεων που μας ενδιαφέρουν, προχωράμε στην αναπαράστασή του χρησιμοποιώντας την έννοια των (μερικών) συναρτήσεων που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 3. Η αναπαράσταση αυτή χωρίζεται σε τρία κύρια μέρη, τα οποία προσδιορίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό το σύνολο των δομών που χαρακτηρίζουν μια περιγραφή πόρων μέσω του μοντέλου αυτού, καθώς και παρέχουν το απαραίτητο υπόβαθρο για τη δήλωση των παραπάνω προτιμήσεων. Δεδομένου, λοιπόν, ενός RDF Σχήματος και ενός έγκυρου RDF στιγμιότυπού του, τα μέρη αυτά είναι:

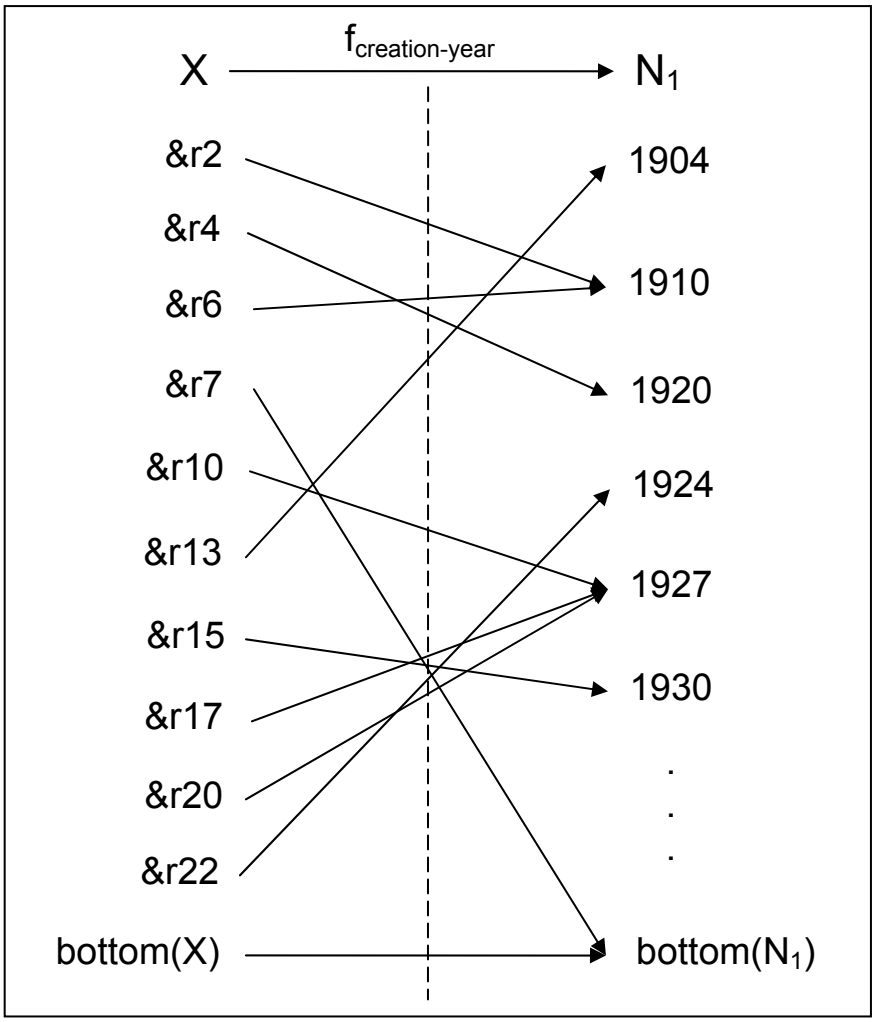
a) *Οι ιδιότητες/γνωρίσματα ενός πόρου,*
b) *Οι ιδιότητες/συσχετίσεις που συνδέουν έναν πόρο με άλλους, και*
c) *Η κατηγοριοποίηση των πόρων στις κλάσεις του RDF Σχήματος όπου ανήκουν, οι οποίες και ενδέχεται να σχετίζονται με ISA σχέσεις και ιεραρχίες*

Παρακάτω, αναλύουμε καθένα από τα μέρη αυτά, παραθέτοντας την αντίστοιχη συναρτησιακή τους αναπαράσταση, καθώς και ενδεικτικά παραδείγματα προτιμήσεων που δηλώνονται με βάση τις αναπαραστάσεις αυτές.

5.2.1 Ιδιότητες/Γνωρίσματα Πόρων

Έχοντας ένα συγκεκριμένο RDF Σχήμα και ένα RDF στιγμιότυπό του, οι εκάστοτε ιδιότητες/γνωρίσματα *είναι μονότιμα και δεν υπάρχουν υποχρεωτικά σε όλους τους πόρους*. Επομένως, *κάθε ιδιότητα/γνώρισμα που σχετίζει μια κλάση του σχήματος με έναν τύπο λεκτικών σταθερών (Literal) μπορεί να θεωρηθεί ως μια μερική συνάρτηση που χαρακτηρίζει τα στιγμιότυπα της κλάσης αυτής στο εκάστοτε RDF στιγμιότυπο του σχήματος.*

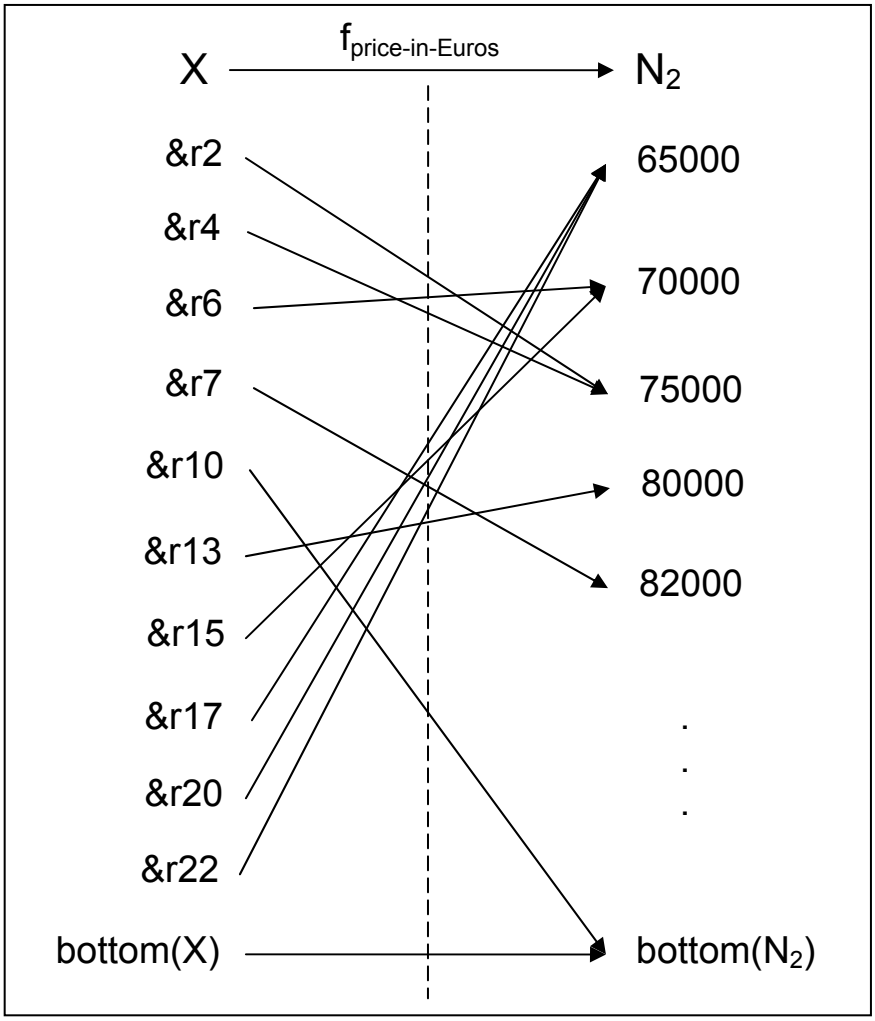
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής αποτελεί το σύνολο των στιγμιότυπων της κλάσης στο RDF στιγμιότυπο και το σύνολο άφιξής της αποτελεί το σύνολο των τιμών που ανήκουν στον παραπάνω τύπο λεκτικών σταθερών. Π.χ., η ιδιότητα *creation-year* του RDF Σχήματος στην Εικόνα 5.1, όπου *domain(creation-year) = Artifact* και *range(creation-year) = Integer*, μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια (μερική) συνάρτηση $f_{creation-year} : X \rightarrow N_1$, όπου X το σύνολο των στιγμιότυπων της κλάσης *Artifact* στο εκάστοτε RDF στιγμιότυπο του σχήματος και N_1 το σύνολο όλων των ακέραιων αριθμών. Η Εικόνα 5.3 παρουσιάζει τη γραφική απεικόνιση της $f_{creation-year}$ για το RDF στιγμιότυπο της Εικόνας 5.2, όπου το X περιέχει *και τα στιγμιότυπα των υποκλάσεων της κλάσης Artifact, αφού και αυτά αποτελούν στιγμιότυπα της κλάσης αυτής*.



Εικόνα 5.3 - Η απεικόνιση της $f_{creation-year} : X \rightarrow N_1$ για το στιγμιότυπο της Εικόνας 5.2

Δεδομένης, τώρα, της παραπάνω συναρτησιακής απεικόνισης για αυτού του είδους τις ιδιότητες, είναι δυνατή η αναπαράσταση προτιμήσεων πάνω στους πόρους/στιγμιότυπα μιας συγκεκριμένης κλάσης του RDF Σχήματος, με βάση τις τιμές τους μέσω των ιδιοτήτων/γνωρισμάτων που χαρακτηρίζουν την παραπάνω κλάση. Για να γίνει αυτό πιο αντιληπτό, παρακάτω παραθέτουμε ένα ενδεικτικό παράδειγμα μιας τέτοιας προτίμησης που σχετίζεται με δύο ιδιότητες/γνωρίσματα:

Παράδειγμα 5.1: Έστω το RDF Σχήμα της Εικόνας 5.1 και το στιγμιότυπό του στην Εικόνα 5.2. Έστω, τώρα, ότι ένας χρήστης δηλώνει την παρακάτω προτίμηση: *«Προτιμώ τα έργα τέχνης (Artifacts) που έχουν φιλοτεχνηθεί παλαιότερα και είναι ακριβότερα, θεωρώντας, όμως, πιο σημαντική την παλαιότητά τους από την τιμή τους»*. Μεταφράζοντας την παραπάνω δήλωση στο δικό μας πλαίσιο, πρόκειται για μια προτίμηση $P_4 = (N_1 \times N_2, \leq_{P_4})$ που εμπλέκει τις συναρτήσεις $f_{creation-year} : X \to N_1$ και $f_{price-in-Euros} : X \to N_2$, οι οποίες και αναπαριστούν τις ιδιότητες *creation-year* και *price-in-Euros* της κλάσης *Artifact*. Το X αποτελεί το σύνολο των στιγμιότυπων της κλάσης στο στιγμιότυπο της Εικόνας 5.2 και τα σύνολα N_1 και N_2 είναι ίσα με το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών. Για μια καλύτερη εποπτεία της $f_{price-in-Euros}$, η Εικόνα 5.4 παρουσιάζει την γραφική της απεικόνιση:

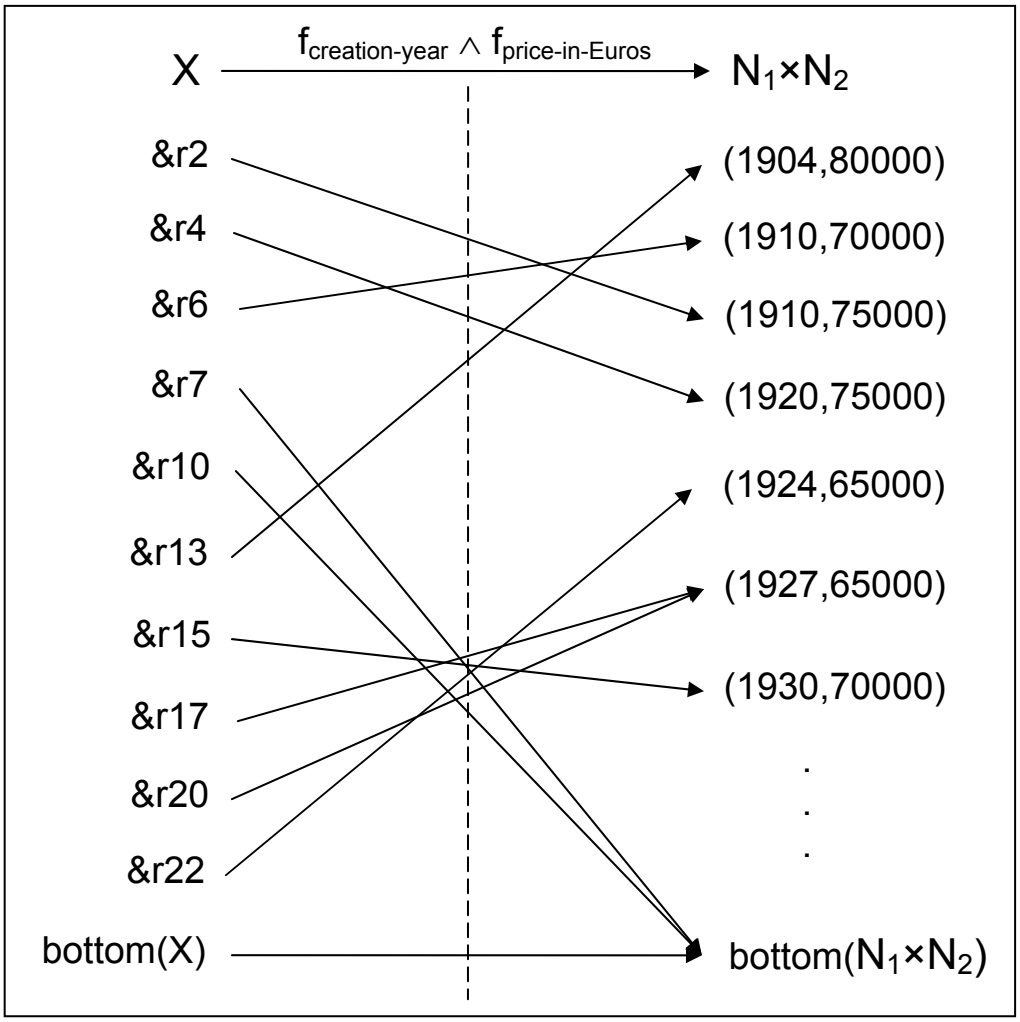


Εικόνα 5.4 - Η απεικόνιση της $f_{price-in-Euros} : X \rightarrow N_2$ για το στιγμιότυπο της Εικόνας 5.2

Με βάση την παραπάνω δήλωση του χρήστη, για τις ατομικές προτιμήσεις $P_4^{N_1} = (N_1, \leq_{P_4^{N_1}})$ και $P_4^{N_2} = (N_2, \leq_{P_4^{N_2}})$, καθώς και την προτίμηση εμπλεκόμενων συναρτήσεων $P_4^S = (S, \leq_{P_4^S})$ της P_4 (όπου $S = \{f_{creation-year}, f_{price-in-Euros}\}$), ισχύει ότι $\forall y, y' \in N_1$ με $y \neq y'$, $y \leq_{P_4^{N_1}} y'$ αν $y > y'$, $\forall z, z' \in N_2$ με $z \neq z'$, $z \leq_{P_4^{N_1}} z'$ αν $z < z'$, και $f_{price-in-Euros} \leq_{P_4^S} f_{creation-year}$. Εκτελώντας τον αλγόριθμο *FinTO* (Εικόνα 3.22) για το $S = \{f_{creation-year}, f_{price-in-Euros}\}$, το σύνολο-αποτέλεσμα που προκύπτει, χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε από τους αλγόριθμους *TOWMax* και *TOWMin*, είναι το $F^S = \{F_1^S, F_2^S\} = \{\{f_{price-in-Euros}\}, \{f_{creation-year}\}\}$. Άρα, μέσω του Ορισμού 3.13, η $\leq_{P_4}$ αποτελεί την μερική διάταξη του συνόλου

$N_1 \succ N_2 = N_1 \times N_2$, όπου τα N_1 και N_2 είναι μερικώς διατεταγμένα ως προς $\leq_{P_4^{N_1}}$ και $\leq_{P_4^{N_2}}$ αντίστοιχα. Οπότε, από τον ορισμό της λεξικογραφικής διάταξης (Ορισμός 2.11), έχουμε τελικά ότι $\forall (y,z),(y',z') \in N_1 \times N_2$, $(y,z) \leq_{P_4} (y',z')$ αν ($y \neq y'$ και $y \leq_{P_4^{N_1}} y'$) ή ($y = y'$ και $z \leq_{P_4^{N_2}} z'$).

Έχοντας κατασκευάσει, πλέον, τη μερική διάταξη $\leq_{P_4}$ (η οποία και αναπαριστά την P_4 στο $N_1 \times N_2$), η διάταξη των στιγμιότυπων της κλάσης *Artifacts* με βάση την $\leq_{P_4}$ γίνεται μέσω του Θεωρήματος 3.1. Αρχικά, δημιουργούμε το συναρτησιακό ταίριασμα $f_{creation-year} \wedge f_{price-in-Euros}$ των εμπλεκόμενων συναρτήσεων της P_4, το οποίο και παρουσιάζεται σχηματικά στην Εικόνα 5.5:



Εικόνα 5.5 - Το συναρτησιακό ταίριασμα $f_{creation-year} \wedge f_{price-in-Euros}$

Όπως βλέπουμε, $range(f_{creation-year} \wedge f_{price-in-Euros}) = \{(1904,80000), (1910,70000), (1910,75000), (1920,75000), (1924,65000), (1927,65000), (1930,70000), bottom(N_1 \times N_2)\}$, άρα το X διαμερίζεται, μέσω της $(f_{creation-year} \wedge f_{price-in-Euros})^{-1}$, στις αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας:

$\overline{x}_1 = (f_{creation-year} \wedge f_{price-in-Euros})^{-1}(1904,80000) = \{\&r13\}$,

$\overline{x}_2 = (f_{creation-year} \wedge f_{price-in-Euros})^{-1}(1910,70000) = \{\&r6\}$,

$\overline{x}_3 = (f_{creation-year} \wedge f_{price-in-Euros})^{-1}(1910,75000) = \{\&r2\}$,

$\overline{x}_4 = (f_{creation-year} \wedge f_{price-in-Euros})^{-1}(1920,75000) = \{\&r4\}$,

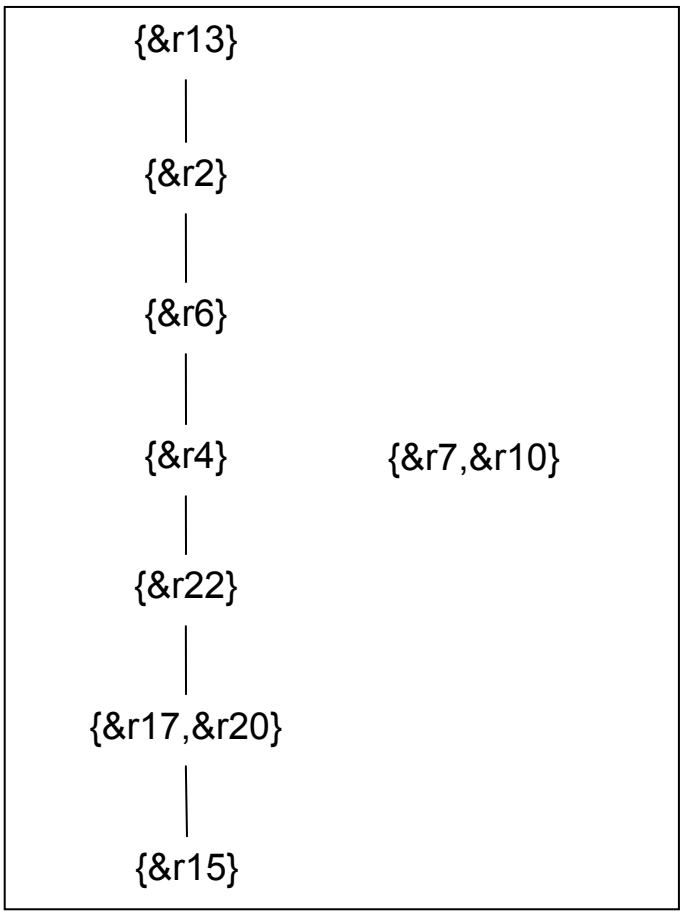
$\overline{x}_5 = (f_{creation-year} \wedge f_{price-in-Euros})^{-1}(1924,65000) = \{\&r22\}$,

$\overline{x}_6 = (f_{creation-year} \wedge f_{price-in-Euros})^{-1}(1927,65000) = \{\&r17,\&r20\}$,

$\overline{x}_7 = (f_{creation-year} \wedge f_{price-in-Euros})^{-1}(1930,70000) = \{\&r15\}$, και

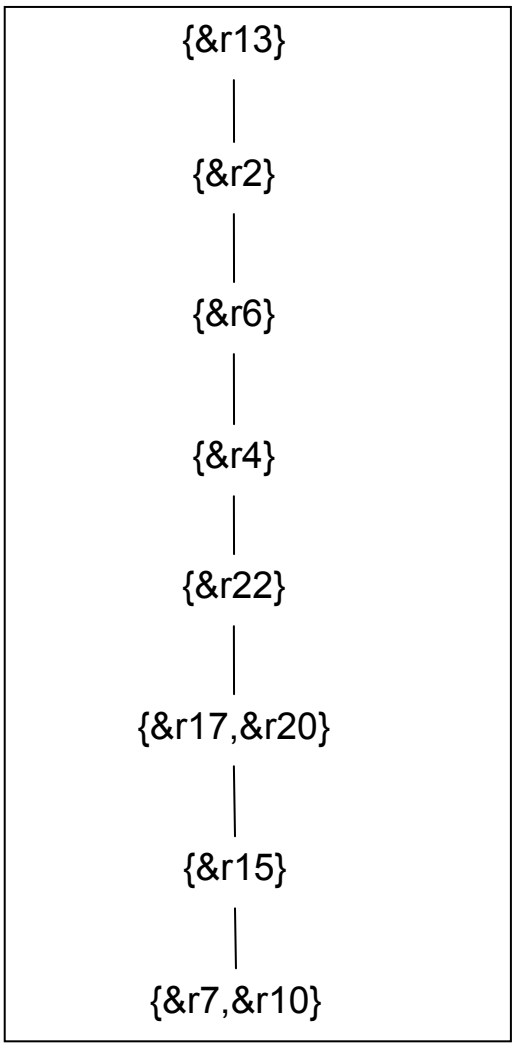
$\overline{x}_8 = (f_{creation-year} \wedge f_{price-in-Euros})^{-1}(bottom(N_1 \times N_2)) = \{\&r7,\&r10,bottom(X)\}$.

Η διάταξη των παραπάνω κλάσεων ισοδυναμίας γίνεται μέσω της διάταξης των αντίστοιχων εικόνων τους στο $range(f_{creation-year} \wedge f_{price-in-Euros})$ με βάση την $\leq_{P_4}$. Οπότε, εφόσον $(1930,70000) \leq_{P_4} (1927,65000) \leq_{P_4} (1924,65000) \leq_{P_4} (1920,75000) \leq_{P_4} (1910,70000) \leq_{P_4} (1910,75000) \leq_{P_4} (1904,80000)$, καθώς και $\forall (y,z) \in N_1 \times N_2$, $bottom(N_1 \times N_2) \not\leq_{P_4} (y,z)$ και $(y,z) \not\leq_{P_4} bottom(N_1 \times N_2)$ (Πρόταση 3.1), έχουμε ότι $\overline{x}_7 \leq_{X/\approx_X} \overline{x}_6 \leq_{X/\approx_X} \overline{x}_5 \leq_{X/\approx_X} \overline{x}_4 \leq_{X/\approx_X} \overline{x}_2 \leq_{X/\approx_X} \overline{x}_3 \leq_{X/\approx_X} \overline{x}_1$, όπως κι ότι η κλάση ισοδυναμίας $\overline{x}_8$ δεν διατάσσεται μέσω της $\leq_{X/\approx_X}$ με καμία από τις υπόλοιπες κλάσεις ισοδυναμίας, όπου $\leq_{X/\approx_X}$ η μερική διάταξη που αντικατοπτρίζει την προτίμηση P_4 στο $X/\approx_X = \{\{\&r13\}, \{\&r6\}, \{\&r2\}, \{\&r4\}, \{\&r22\}, \{\&r17,\&r20\}, \{\&r15\}, \{\&r7,\&r10,bottom(X)\}\}$. Όπως είδαμε και σε προηγούμενα παραδείγματα στο Κεφάλαιο 3, το $bottom(X)$ μπορεί να εξαλειφθεί από την κλάση ισοδυναμίας $\overline{x}_8 = \{\&r7,\&r10,bottom(X)\}\}$ *χωρίς απώλεια πληροφορίας*, αφού αποτελεί *μη-ορισμένη τιμή* του X. Η Εικόνα 5.6 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του $X/\approx_X$ μέσω της $\leq_{X/\approx_X}$, όπου το $bottom(X)$ έχει εξαλειφθεί.



Εικόνα 5.6 - Το διάγραμμα Hasse του $X / \approx_X$ μέσω της $\leq_{X/\approx_X}$ για το Παράδειγμα 5.1

Έχοντας την παραπάνω διάταξη για το $X / \approx_X$, η τελική αλληλουχία οθονών που παρουσιάζονται στο χρήστη δημιουργείται με βάση το Θεώρημα 3.4. Σ' αυτήν εδώ την περίπτωση, το σύνολο-αποτέλεσμα F του αλγόριθμου *FinTO* με είσοδο το $X / \approx_X$ είναι το ίδιο *ανεξάρτητα από το ποιός από τους δύο αλγόριθμους TOWMin και TOWMax χρησιμοποιείται* και ίσο με $F = \{\{\{\&r13\}\}, \{\{\&r2\}\}, \{\{\&r6\}\}, \{\{\&r4\}\}, \{\{\&r22\}\}, \{\{\&r17,\&r20\}\}, \{\{\&r15\}\}, \{\{\&r7,\&r10\}\}\}$. Έτσι, έχουμε μια τελική εκδοχή του συνόλου $Monitors$, οπότε και μια τελική αλληλουχία οθονών αποτελεσμάτων. Η Εικόνα 5.7 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του $Monitors$ μέσω της $\leq_O$ που ορίζεται στο Θεώρημα 3.4, το οποίο και αναπαριστά την αλληλουχία αυτή. □



Εικόνα 5.7 - Το διάγραμμα Hasse του $Monitors$ **μέσω της** $\leq_O$ **για το Παράδειγμα 5.1**

5.2.2 Ιδιότητες/Συσχετίσεις Πόρων

Για μια ορισμένη ιδιότητα μεταξύ κλάσεων ενός συγκεκριμένου RDF Σχήματος, *δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελεί συνάρτηση*, εφόσον σε ένα έγκυρο RDF στιγμιότυπο του σχήματος *είναι δυνατό* ένα στιγμιότυπο που ανήκει στο πεδίο ορισμού (domain) της ιδιότητας να σχετίζεται μέσω αυτής με δύο ή και παραπάνω στιγμιότυπα που ανήκουν στο πεδίο τιμών (range). Π.χ., στο RDF στιγμιότυπο της Εικόνας 5.2, το στιγμιότυπο $\&r1$ της κλάσης *Cubist* (που αποτελεί υποκλάση της *Painter*) συνδέεται μέσω της ιδιότητας *paints* με δύο στιγμιότυπα της κλάσης *Painting*, τα $\&r2$ και $\&r4$. Για το λόγο αυτό, χρειαζόμαστε μια διαφορετική προσέγγιση συναρτησιακής αναπαράστασης από αυτήν που ακολουθήσαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Όπως ξέρουμε, κάθε δήλωση (RDF Statement) που ανήκει σε ένα συγκεκριμένο RDF στιγμιότυπο προσδιορίζεται *μοναδικά* από την τριπλέτα *του υποκειμένου (subject), του κατηγορήματος (predicate) και του αντικειμένου (object) της*. Οπότε, αναλογιζόμενοι ότι στον RDF γράφο/στιγμιότυπο ενός RDF σχήματος, οι δηλώσεις αποτελούν τα *μονοπάτια του γράφου με μοναδιαίο μήκος*, *κάθε τέτοιο μονοπάτι μπορεί να προσδιοριστεί μοναδικά από τις ετικέτες των δύο κόμβων και της ακμής που τους συνδέει*. Με βάση το γεγονός αυτό, δεδομένου ενός RDF Σχήματος και ενός RDF στιγμιότυπου του σχήματος αυτού, για κάθε ορισμένη ιδιότητα μεταξύ κλάσεων του σχήματος, *τα μονοπάτια μοναδιαίου μήκους του αντίστοιχου RDF γράφου του στιγμιότυπου, των οποίων η ακμή αποτελεί στιγμιότυπο της παραπάνω ιδιότητας, μπορούν να προσδιοριστούν μοναδικά με βάση την ιδιότητα αυτή από το ζεύγος των αντίστοιχων ετικετών των κόμβων αποστολής και προορισμού.* Π.χ., για την ιδιότητα *paints* του RDF Σχήματος στην Εικόνα 5.1 και τα αντίστοιχα μονοπάτια $\&r1 \xrightarrow{paints} \&r2$, $\&r1 \xrightarrow{paints} \&r4$, $\&r9 \xrightarrow{paints} \&r10$ και $\&r14 \xrightarrow{paints} \&r15$ του RDF γράφου στην Εικόνα 5.2, τα ζεύγη $(\&r1,\&r2)$, $(\&r1,\&r4)$, $(\&r9,\&r10)$ και $(\&r14,\&r15)$ χαρακτηρίζουν μοναδικά τα μονοπάτια αυτά με βάση την *paints*. Μέσω της παρατήρησης αυτής, κάθε τέτοιο ζεύγος αποτελεί *αναγνωριστικό (identifier) του εκάστοτε μονοπατιού* για την συγκεκριμένη ιδιότητα του σχήματος. Άλλες πιο σύνθετες συναρτήσεις απόδοσης αναγνωριστικών στα μονοπάτια μπορούν, φυσικά, να χρησιμοποιηθούν. Το σύνολο των αναγνωριστικών των μονοπατιών $\&rX \xrightarrow{p} \&rY$ του RDF γράφου-στιγμιότυπου με βάση μια ιδιότητα p μεταξύ κλάσεων του RDF Σχήματος συμβολίζεται ως I_p. Π.χ., για το RDF Σχήμα στην Εικόνα 5.1 και τον RDF γράφο στην Εικόνα 5.2, έχουμε ότι:

$I_{creates} = \{(\&r12,\&r13),(\&r19,\&r20)\}$,

$I_{paints} = \{(\&r1,\&r2),(\&r1,\&r4),(\&r9,\&r10),(\&r14,\&r15)\}$,

$I_{sculpts} = \{(\&r5,\&r6),(\&r5,\&r7)\}$, και

$I_{exhibited} = \{(\&r2,\&r3),\ (\&r4,\&r3),\ (\&r6,\&r3),\ (\&r7,\&r8),\ (\&r10,\&r11),$
$(\&r13,\&r11),\ (\&r15,\&r16),\ (\&r17,\&r18)\}$,

όπου $I_{creates}$, I_{paints}, $I_{sculpts}$ και $I_{exhibited}$ τα σύνολα των αναγνωριστικών των μονοπατιών μοναδιαίου μήκους του RDF στιγμιότυπου με ετικέτες ακμής *creates*, *paints*, *sculpts* και *exhibited* αντίστοιχα.

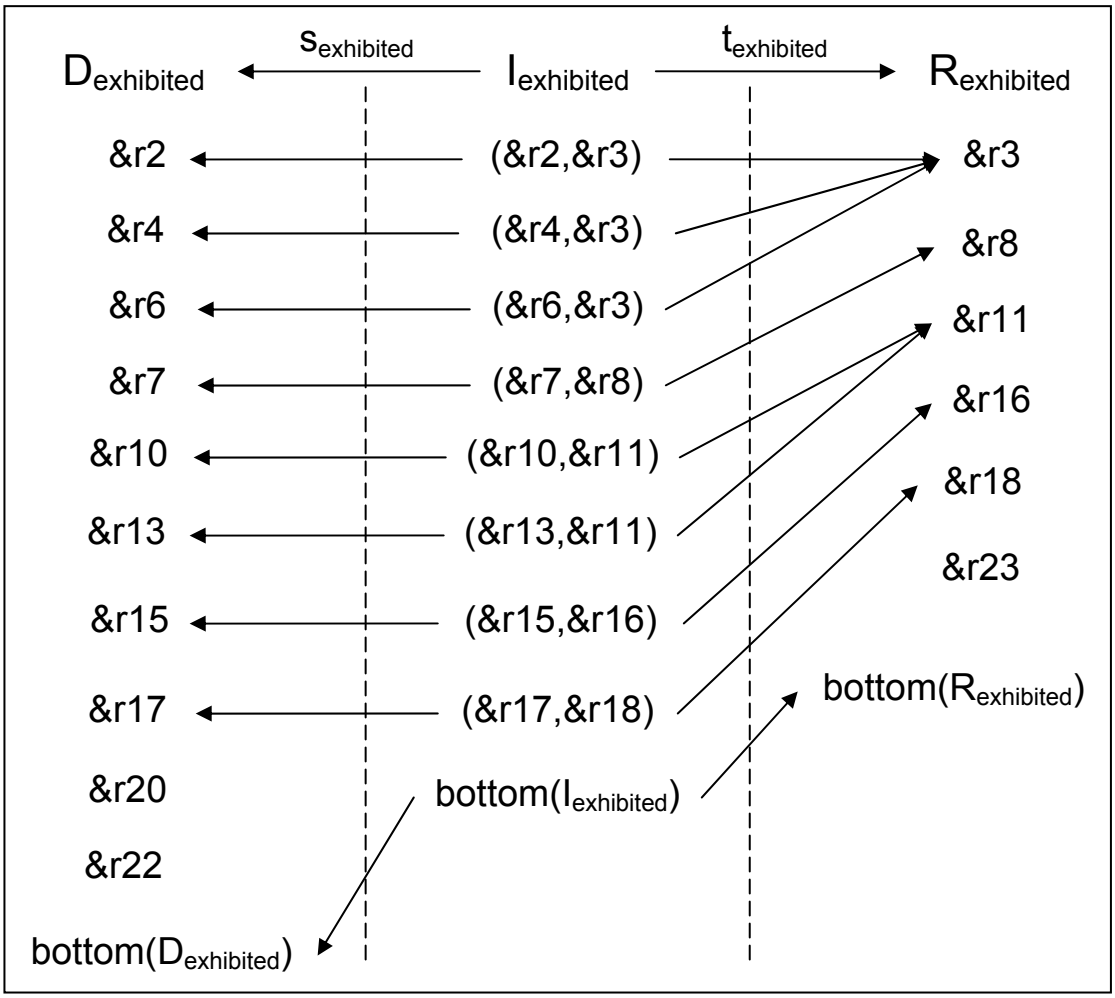
Έχοντας, πλέον, καθορίσει για κάθε ορισμένη ιδιότητα μεταξύ κλάσεων ενός RDF σχήματος το σύνολο των αναγνωριστικών των μονοπατιών μοναδιαίου μήκους που περιέχονται στον αντίστοιχο RDF γράφο-στιγμιότυπο και των οποίων η ακμή αποτελεί στιγμιότυπο της ιδιότητας αυτής, μπορούμε για κάθε τέτοιο σύνολο *να ορίσουμε συναρτήσεις που σχετίζουν τα εκάστοτε αναγνωριστικά του συνόλου με τους κόμβους-πόρους που περιέχονται στα αντίστοιχα μονοπάτια*. Συγκεκριμένα, για ένα σύνολο αναγνωριστικών μονοπατιών μοναδιαίου μήκους I_p, όπου p μια ιδιότητα μεταξύ κλάσεων, ορίζουμε τις παρακάτω δύο συναρτήσεις:

Ορισμός 5.1: *Έστω RDF Σχήμα* S και D *ένα έγκυρο στιγμιότυπό του. Τότε, για κάθε σύνολο* I_p*, όπου* p *μια ιδιότητα μεταξύ κλάσεων του* S*:*

a) *Η συνάρτηση* $s_p : I_p \to D_p$*, όπου* D_p *το σύνολο των στιγμιότυπων του πεδίου ορισμού (domain) της* p *που περιέχονται στο* D *και για την οποία* $\forall(\&rX,\&rY) \in I_p$, $s_p(\&rX,\&rY) = \&rX$, *αποτελεί τη συνάρτηση πηγής (source function) του* I_p.

b) *Η συνάρτηση* $t_p : I_p \to R_p$*, όπου* R_p *το σύνολο των στιγμιότυπων του πεδίου τιμών (range) της* p *που περιέχονται στο* D *και για την οποία* $\forall(\&rX,\&rY) \in I_p$, $t_p(\&rX,\&rY) = \&rY$, *αποτελεί τη συνάρτηση στόχου (target function) του* I_p.□

Για μια καλύτερη εποπτεία των δύο αυτών συναρτήσεων, η Εικόνα 5.8 παρουσιάζει την σχηματική απεικόνιση των $s_{exhibited} : I_{exhibited} \to D_{exhibited}$ και $t_{exhibited} : I_{exhibited} \to R_{exhibited}$ για την ιδιότητα *exhibited* του RDF Σχήματος στην Εικόνα 5.1 (όπου *domain(exhibited) = Artifact* και *range(exhibited) = Museum*), βάσει του RDF στιγμιότυπου στην Εικόνα 5.2. Όπως βλέπουμε, οι συναρτήσεις αυτές χαρακτηρίζουν την άμεση πληροφορία που περιέχεται στα μονοπάτια, εφόσον τα σχετίζουν με τους πόρους που περιέχουν.



Εικόνα 5.8 - Η σχηματική απεικόνιση των συναρτήσεων $s_{exhibited}$ και $t_{exhibited}$

Μέσω του καθορισμού των I_p για τις ιδιότητες/συσχετίσεις μεταξύ κλάσεων του RDF Σχήματος, μπορούμε, με βάση τα σύνολα αυτά, να προσδιορίσουμε αντίστοιχα αναγνωριστικά *για κάθε μονοπάτι του RDF γράφου-στιγμιότυπου από πόρο σε πόρο με μήκος δύο*. Η διαδικασία είναι αρκετά απλή και βασίζεται στο γεγονός ότι ένα μονοπάτι μήκους δύο στο RDF στιγμιότυπο *μπορεί να προσδιοριστεί απόλυτα από τα δύο μονοπάτια μοναδιαίου μήκους που περιέχει*. Δεδομένων, λοιπόν, δύο (όχι απαραίτητα διαφορετικών) ιδιοτήτων μεταξύ κλάσεων p' και p'' του RDF Σχήματος:

a) Για κάθε μονοπάτι $\&rX \xrightarrow{p'} \&rY \xrightarrow{p''} \&rZ$ που υπάρχει στο RDF στιγμιότυπο, η *ακολουθία* $(\&rX,\&rY,\&rZ)$ *των πόρων που περιέχει αποτελεί το αναγνωριστικό (identifier) του με βάση τις* p', p'', και

b) Το σύνολο των αναγνωριστικών αυτών συμβολίζεται ως $I_{p',p''}$, όπου $\forall(\&rX,\&rY,\&rZ) \in I_{p',p''}$, ισχύει ότι $(\&rX,\&rY) \in I_{p'}$ και $(\&rY,\&rZ) \in I_{p''}$.

Π.χ., για το RDF Σχήμα της Εικόνας 5.1 και το RDF στιγμιότυπό του στην Εικόνα 5.2 έχουμε ότι $I_{creates,exhibited} = \{(\&r12,\&r13,\&r11)\}$, $I_{pa\text{int}s,exhibited} = \{(\&r1,\&r2,\&r3), (\&r1,\&r4,\&r3), (\&r9,\&r10,\&r11), (\&r14,\&r15,\&r16)\}$ και $I_{sculpts,exhibited} = \{(\&r5,\&r6,\&r3),(\&r5,\&r7,r8)\}$.

Όπως βλέπουμε παραπάνω, τα αναγνωριστικά μονοπατιών ενός συνόλου $I_{p',p''}$ σχετίζονται *άμεσα* με τα αναγνωριστικά μονοπατιών των συνόλων $I_{p'}$ και $I_{p''}$. Αυτή η αντιστοίχηση μπορεί να εκφραστεί τυπικά μέσω του παρακάτω ορισμού:

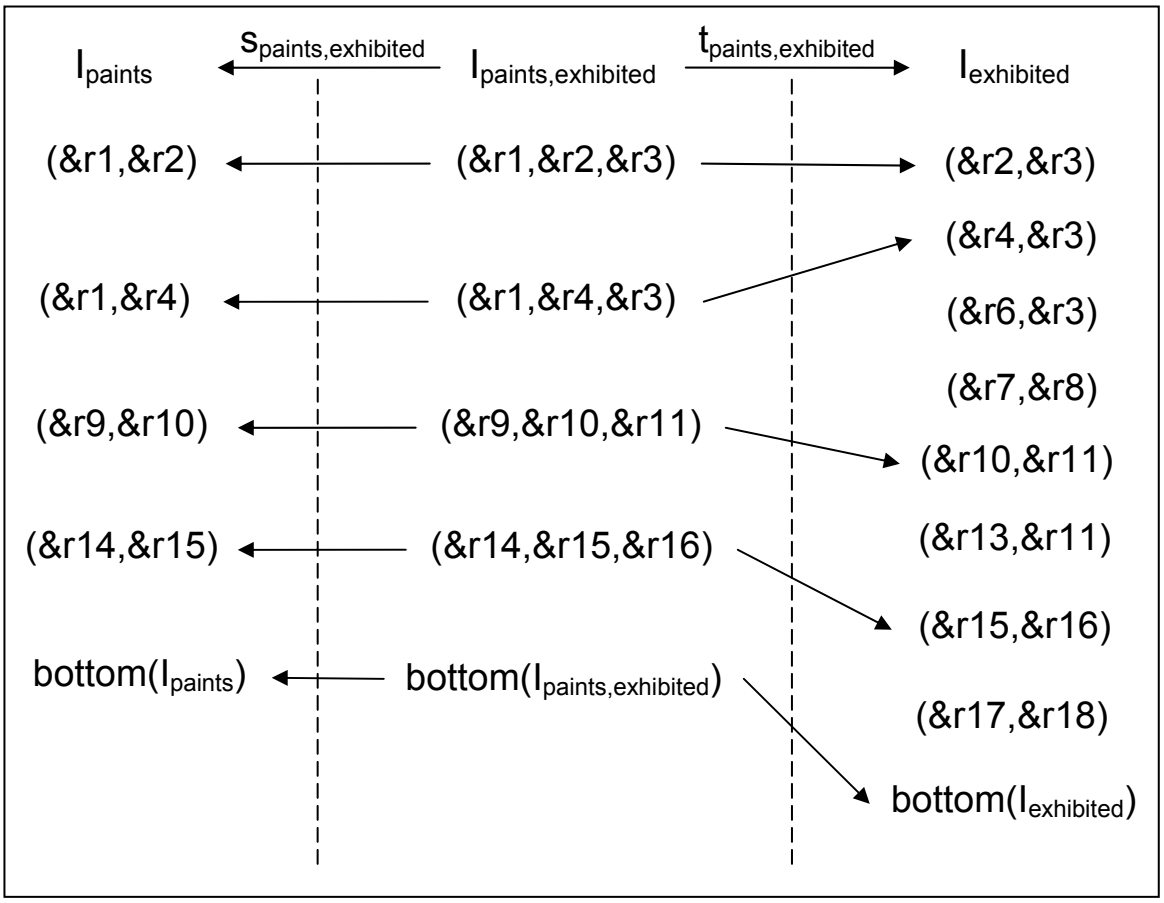
Ορισμός 5.2: *Έστω RDF Σχήμα S και D ένα έγκυρο στιγμιότυπό του. Τότε, για κάθε σύνολο $I_{p',p''}$, όπου p', p'' δύο όχι απαραίτητα διαφορετικές ιδιότητες μεταξύ κλάσεων του S:*

a) Η συνάρτηση $s_{p',p''} : I_{p',p''} \to I_{p'}$, όπου $I_{p'}$ το σύνολο των αναγνωριστικών των μονοπατιών μοναδιαίου μήκους του D με βάση την p' και για την οποία $\forall(\&rX,\&rY,\&rZ) \in I_{p',p''}$, $s_{p',p''}(\&rX,\&rY,\&rZ) = (\&rX,\&rY)$, αποτελεί τη συνάρτηση πηγής (source function) του $I_{p',p''}$.

b) Η συνάρτηση $t_{p',p''} : I_{p',p''} \to I_{p''}$, όπου $I_{p''}$ το σύνολο των αναγνωριστικών των μονοπατιών μοναδιαίου μήκους του D με βάση την p'' και για την οποία $\forall(\&rX,\&rY,\&rZ) \in I_{p',p''}$, $t_{p',p''}(\&rX,\&rY,\&rZ) = (\&rY,\&rZ)$, αποτελεί τη συνάρτηση στόχου (target function) του $I_{p',p''}$.□

Για μια καλύτερη εποπτεία των παραπάνω συναρτήσεων, η Εικόνα 5.9 παρουσιάζει την σχηματική απεικόνιση των $s_{pa\text{int}s,exhibited} : I_{pa\text{int}s,exhibited} \to I_{pa\text{int}s}$

και $t_{paints,exhibited} : I_{paints,exhibited} \rightarrow I_{exhibited}$ για το RDF Σχήμα στην Εικόνα 5.1 και το RDF στιγμιότυπό του στην Εικόνα 5.2.



Εικόνα 5.9 - Η σχηματική απεικόνιση των συναρτήσεων $s_{paints,exhibited}$ και $t_{paints,exhibited}$

Όπως βλέπουμε, ο Ορισμός 5.2 είναι διαισθητικά *παρόμοιος* με τον Ορισμό 5.1 με τη μόνη διαφορά ότι τα σύνολα άφιξης των $s_{p',p''}$ και $t_{p',p''}$ *δεν περιέχουν πόρους του RDF στιγμιότυπου*, αλλά *αναγνωριστικά μονοπατιών*. Αυτό σημαίνει ότι τα μονοπάτια που χαρακτηρίζονται από το εκάστοτε $I_{p',p''}$, *δεν σχετίζονται άμεσα μέσω των* $s_{p',p''}$ *και* $t_{p',p''}$ *με τους κόμβους-πόρους που περιέχουν*. Ωστόσο, η παραπάνω αμεσότητα *μπορεί να επιτελεστεί* με συγκεκριμένες εφαρμογές της συναρτησιακής σύνθεσης (Ορισμός 3.4) των συναρτήσεων πηγής/στόχου του $I_{p'}$ ή του $I_{p''}$ με τις συναρτήσεις πηγής/στόχου του $I_{p',p''}$. Π.χ., η αντιστοίχηση του συνόλου $I_{paints,exhibited}$ (Εικόνα 5.9) στο σύνολο $R_{exhibited}$ (Εικόνα 5.8) των στιγμιότυπων της κλάσης *Museum* που περιέχονται στο RDF στιγμιότυπο, μπορεί να γίνει μέσω της

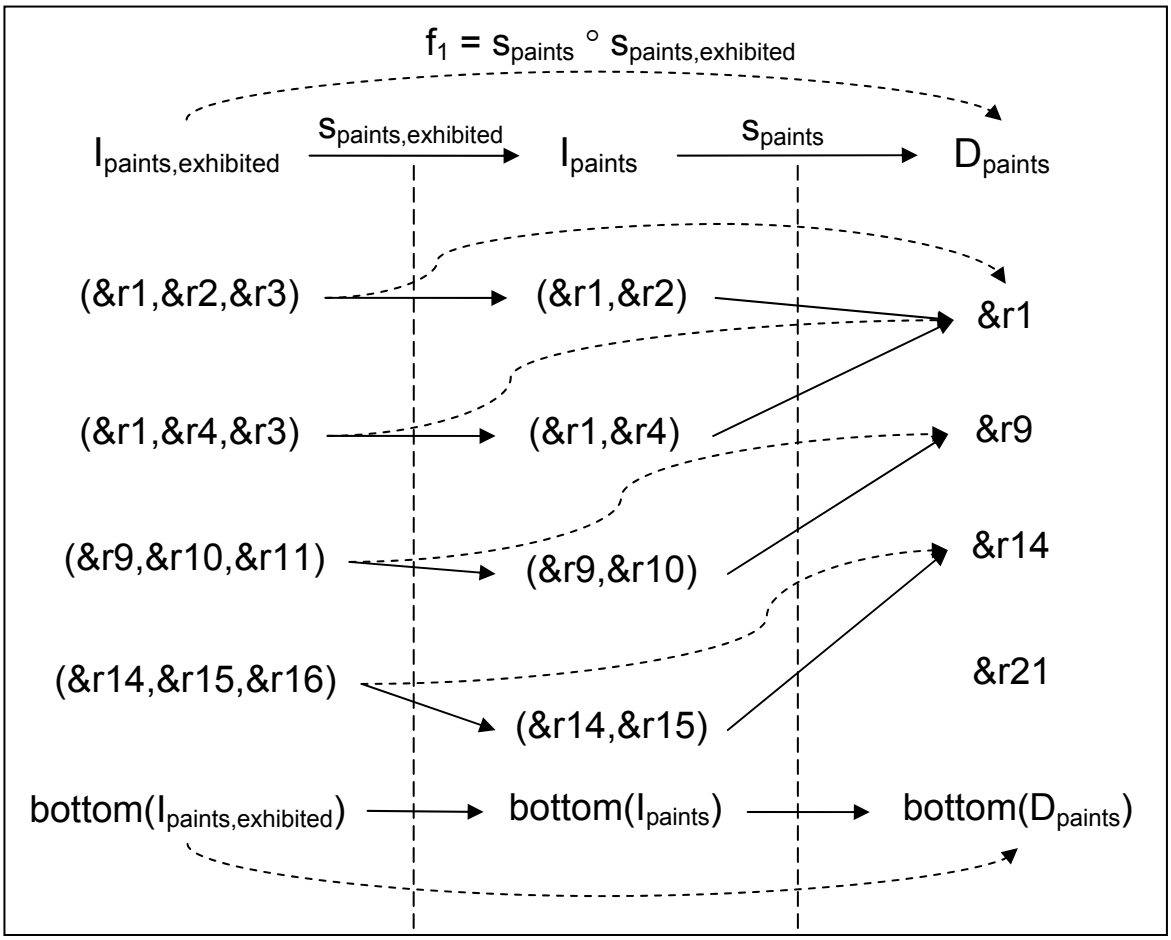
συναρτησιακής σύνθεσης $t_{exhibited} \circ t_{paints,exhibited} : I_{paints,exhibited} \to R_{exhibited}$ των $t_{exhibited} : I_{exhibited} \to R_{exhibited}$ στην Εικόνα 5.8 και $t_{paints,exhibited} : I_{paints,exhibited} \to I_{exhibited}$ στην Εικόνα 5.9.

Παραπάνω, αναλύσαμε την διαδικασία καθορισμού αναγνωριστικών για μονοπάτια μήκους δύο με βάση τα σύνολα των αναγνωριστικών για μονοπάτια μοναδιαίου μήκους και καταλήξαμε σε ορισμούς *σχεδόν παρόμοιων συναρτήσεων* που τα χαρακτηρίζουν. Λόγω της δομής που ακολουθείται, η διαδικασία αυτή *μπορεί να χρησιμοποιηθεί επαναληπτικά και για τον καθορισμό αναγνωριστικών για μονοπάτια του RDF γράφου-στιγμιότυπου με μήκος μεγαλύτερο από δύο*.

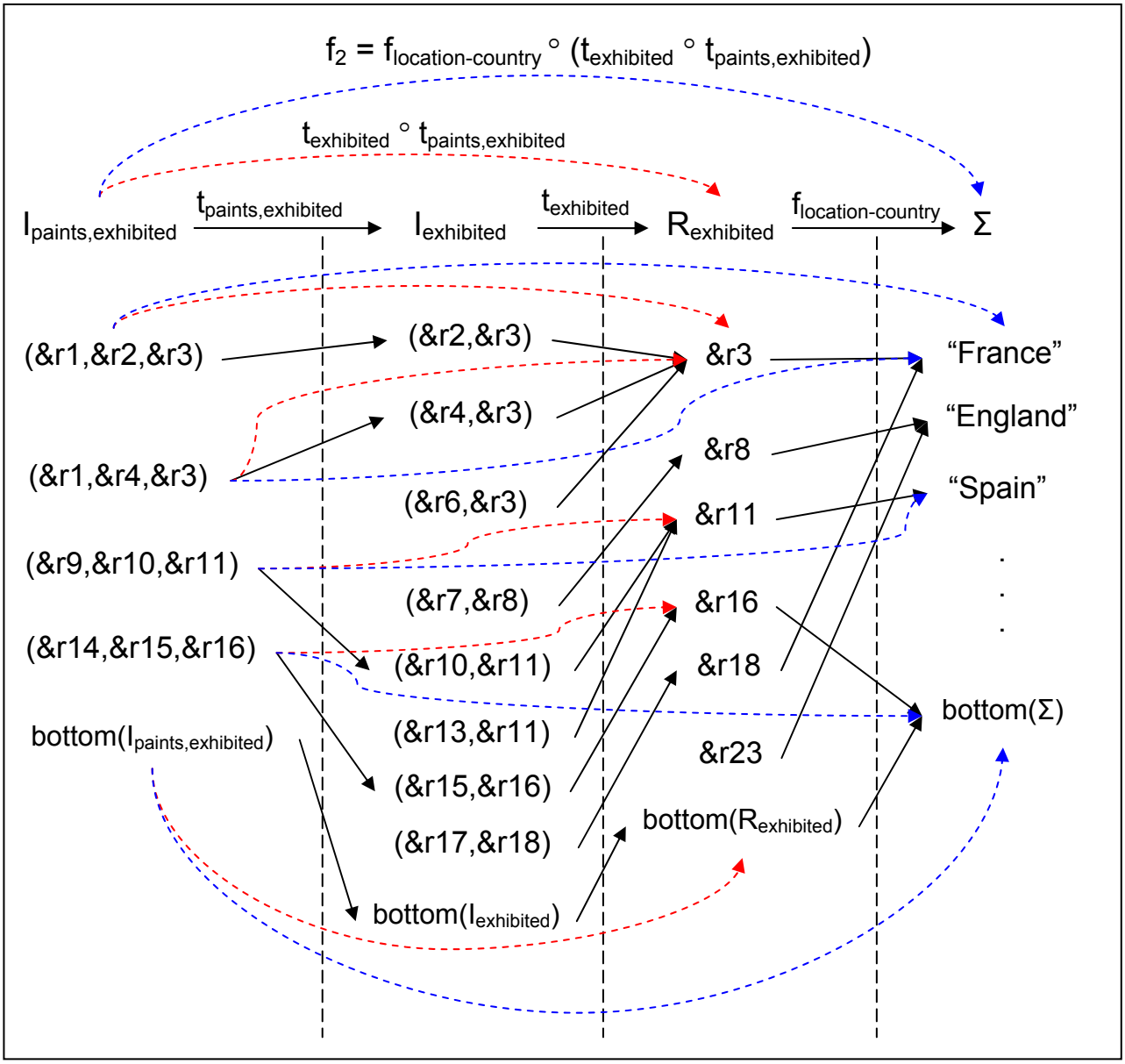
Μέσω της συναρτησιακής αναπαράστασης που εισαγάγαμε σ' αυτή την ενότητα, οι δηλώσεις προτιμήσεων μπορούν να γίνουν αρκετά πιο σύνθετες, καθότι, πλέον, είναι δυνατό να εκφράζονται, εκτός από τις τιμές των ιδιοτήτων/γνωρισμάτων των πόρων, και πάνω σε ολόκληρα *μονοπάτια* του RDF στιγμιότυπου που συνδέουν πόρους. Έτσι, είναι δυνατή και η αναπαράσταση προτιμήσεων πάνω σε μονοπάτια ίδιου μήκους του RDF στιγμιότυπου που χαρακτηρίζονται από την ίδια ακολουθία ιδιοτήτων, με βάση τους πόρους που περιέχουν, καθώς και τις τιμές των πόρων αυτών μέσω των ιδιοτήτων/γνωρισμάτων των αντίστοιχων κλάσεων όπου ανήκουν. Για να γίνει αυτό ξεκάθαρο, παραθέτουμε παρακάτω ένα ενδεικτικό παράδειγμα τέτοιας προτίμησης:

Παράδειγμα 5.2: Έστω το RDF Σχήμα της Εικόνας 5.1 και το στιγμιότυπό του στην Εικόνα 5.2. Έστω, τώρα, ότι ένας χρήστης δηλώνει την παρακάτω προτίμηση πάνω στα μονοπάτια $Painter \xrightarrow{paints} Painting \xrightarrow{exhibited} Museum$ του στιγμιότυπου: *«Από τα μονοπάτια* $Painter \xrightarrow{paints} Painting \xrightarrow{exhibited} Museum$*, προτιμώ αυτά με ζωγράφο* $\&r1$ *και, εξίσου, αυτά όπου το μουσείο βρίσκεται στη Γαλλία»*. Μεταφράζοντας την παραπάνω δήλωση στο δικό μας πλαίσιο, πρόκειται για μια προτίμηση $P_5 = (D_{paints} \times \Sigma, \leq_{P_5})$ πάνω στο σύνολο $I_{paints,exhibited}$ με εμπλεκόμενες συναρτήσεις τις $f_1 = s_{paints} \circ s_{paints,exhibited} : I_{paints,exhibited} \to D_{paints}$ και $f_2 = f_{location-country} \circ (t_{exhibited} \circ t_{paints,exhibited}) : I_{paints,exhibited} \to \Sigma$, όπου η συνάρτηση

$f_{location-country}$ αναπαριστά την ιδιότητα *location-country* της κλάσης *Museum* , το Σ αποτελεί το σύνολο όλων των αλφαριθμητικών και το D_{paints} αποτελεί το σύνολο των στιγμιότυπων του πεδίου ορισμού (domain) της *paints* που περιέχονται στο στιγμιότυπο της Εικόνας 5.2, δηλαδή το σύνολο των στιγμιότυπων της κλάσης *Artist*. Για μια καλύτερη εποπτεία των f_1 και f_2, οι Εικόνες 5.10 και 5.11 παρουσιάζουν την σχηματική τους αναπαράσταση μέσω των συναρτήσεων-συνιστωσών τους.



Εικόνα 5.10 - Η συνάρτηση $f_1 = s_{paints} \circ s_{paints,exhibited} : I_{paints,exhibited} \rightarrow D_{paints}$



Εικόνα 5.11 - Η συνάρτηση $f_2 = f_{location-country} \circ (t_{exhibited} \circ t_{paints,exhibited}) : I_{paints,exhibited} \to \Sigma$

Με βάση την παραπάνω δήλωση του χρήστη, για τις ατομικές προτιμήσεις $P_5^{D_{paints}} = (D_{paints}, \leq_{P_5^{D_{paints}}})$ και $P_5^{\Sigma} = (\Sigma, \leq_{P_5^{\Sigma}})$, καθώς και την προτίμηση εμπλεκόμενων συναρτήσεων $P_5^{S} = (S, \leq_{P_5^{S}})$ της P_5 (όπου $S = \{f_1, f_2\}$), έχουμε ότι:

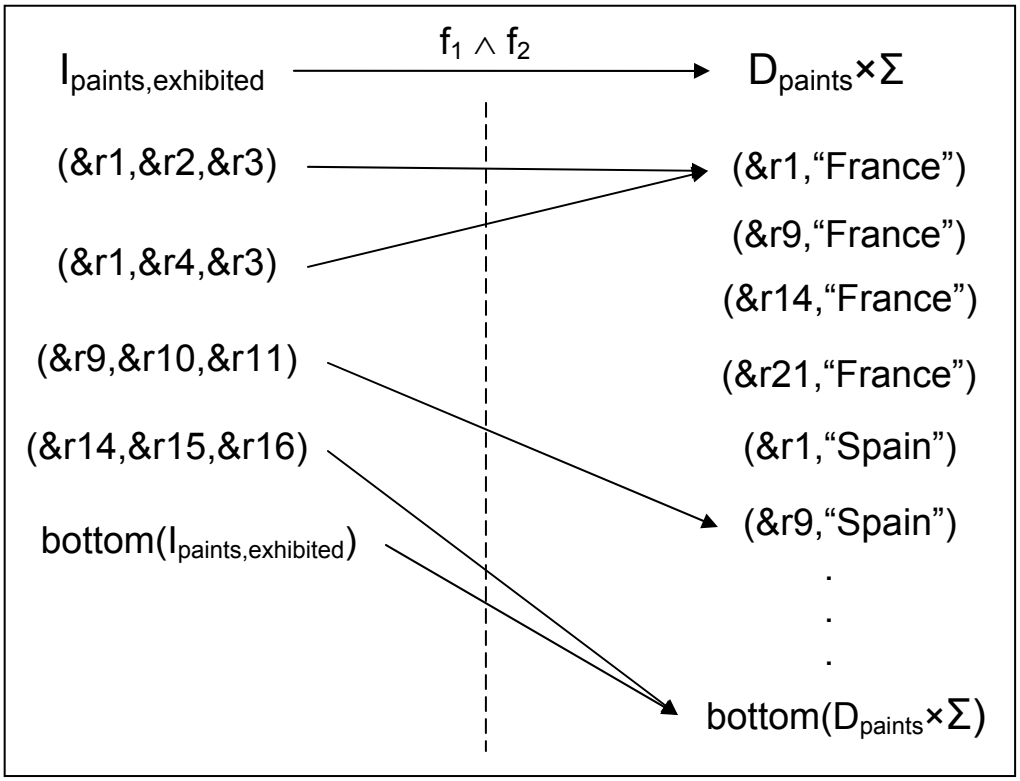
a) $\forall y, y' \in D_{paints}$ με $y \neq y'$, $y \leq_{P_5^{D_{paints}}} y'$ αν $y' = \&r1$,

b) $\forall z, z' \in \Sigma$ με $z \neq z'$, $z \leq_{P_5^{\Sigma}} z'$ αν $z' = "France"$, και

c) $f_1 \not\leq_{P_5^{S}} f_2$ και $f_2 \not\leq_{P_5^{S}} f_1$.

Εκτελώντας τον αλγόριθμο *FinTO* (Εικόνα 3.22) για το $S = \{f_1, f_2\}$, το σύνολο-αποτέλεσμα που προκύπτει, χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε από τους αλγόριθμους *TOWMax* και *TOWMin*, είναι το $F^S = \{F_1^S\} = \{\{f_1, f_2\}\}$. Άρα, μέσω του Ορισμού 3.13, η $\leq_{P_5}$ αποτελεί την μερική διάταξη του συνόλου $D_{paints} \otimes \Sigma = D_{paints} \times \Sigma$, όπου τα D_{paints} και Σ είναι μερικώς διατεταγμένα ως προς $\leq_{P_5^{D_{paints}}}$ και $\leq_{P_5^{\Sigma}}$ αντίστοιχα. Οπότε, από τον ορισμό της διάταξης μέσω συντεταγμένων (Ορισμός 2.10), έχουμε τελικά ότι $\forall (y,z),(y',z') \in D_{paints} \times \Sigma$, $(y,z) \leq_{P_5} (y',z')$ αν $y \leq_{P_5^{D_{paints}}} y'$ και $z \leq_{P_5^{\Sigma}} z'$.

Έχοντας, πλέον, καθορίσει τη μερική διάταξη $\leq_{P_5}$, η διάταξη των αναγνωριστικών του συνόλου με βάση την $\leq_{P_5}$ γίνεται μέσω του Θεωρήματος 3.1. Όπως και προηγουμένως, αρχικά δημιουργούμε το συναρτησιακό ταίριασμα $f_1 \wedge f_2$ των εμπλεκόμενων συναρτήσεων της P_5, το οποίο και παρουσιάζεται σχηματικά στην Εικόνα 5.12:



Εικόνα 5.12 - Το συναρτησιακό ταίριασμα των f_1 και f_2 του Παραδείγματος 5.2

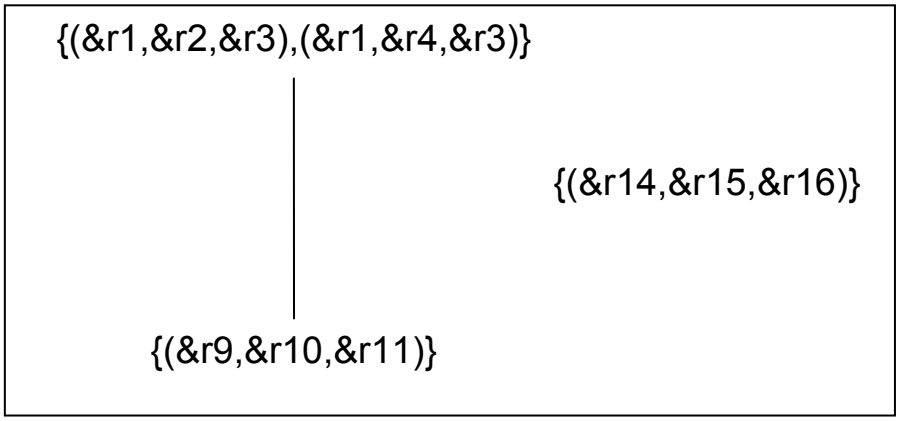
Όπως βλέπουμε, $range(f_1 \wedge f_2) = \{(\&r1, "France"), (\&r9, "Spain"), bottom(D_{pa\text{int}s} \times \Sigma)\}$, άρα το $I_{pa\text{int}s,exhibited}$ διαμερίζεται, μέσω της $(f_1 \wedge f_2)^{-1}$, στις αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας:

$\overline{i_1} = (f_1 \wedge f_2)^{-1}(\&r1, "France") = \{(\&r1, \&r2, \&r3), (\&r1, \&r4, \&r3)\}$,

$\overline{i_2} = (f_1 \wedge f_2)^{-1}(\&r9, "Spain") = \{(\&r9, \&r10, \&r11)\}$, και

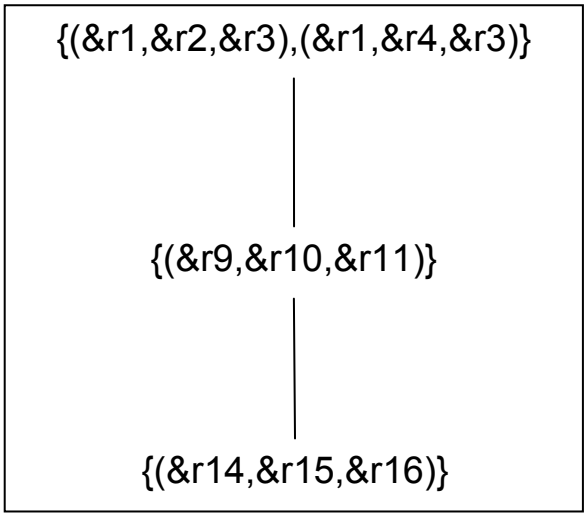
$\overline{i_3} = (f_1 \wedge f_2)^{-1}(bottom(D_{pa\text{int}s} \times \Sigma)) = \{(\&r14, \&r15, \&r16), bottom(I_{pa\text{int}s,exhibited})\}$.

Όπως ξέρουμε, η διάταξη των παραπάνω κλάσεων ισοδυναμίας γίνεται μέσω της διάταξης των αντίστοιχων εικόνων τους στο $range(f_1 \wedge f_2)$ με βάση την $\leq_{P_5}$. Οπότε, αφού $(\&r9, "Spain") \leq_{P_5} (\&r1, "France")$, καθώς και $\forall (y,z) \in D_{pa\text{int}s} \times \Sigma$, $bottom(D_{pa\text{int}s} \times \Sigma) \not\leq_{P_5} (y,z)$ και $(y,z) \not\leq_{P_5} bottom(D_{pa\text{int}s} \times \Sigma)$ (Πρόταση 3.1), έχουμε $\overline{i_2} \leq_{I_{pa\text{int}s,exhibited}/\approx_{I_{pa\text{int}s,exhibited}}} \overline{i_1}$, $\overline{i_3} \not\leq_{I_{pa\text{int}s,exhibited}/\approx_{I_{pa\text{int}s,exhibited}}} \overline{i_2}$, $\overline{i_2} \not\leq_{I_{pa\text{int}s,exhibited}/\approx_{I_{pa\text{int}s,exhibited}}} \overline{i_3}$, $\overline{i_3} \not\leq_{I_{pa\text{int}s,exhibited}/\approx_{I_{pa\text{int}s,exhibited}}} \overline{i_1}$ και $\overline{i_1} \not\leq_{I_{pa\text{int}s,exhibited}/\approx_{I_{pa\text{int}s,exhibited}}} \overline{i_3}$, όπου $\leq_{I_{pa\text{int}s,exhibited}/\approx_{I_{pa\text{int}s,exhibited}}}$ η μερική διάταξη που αντικατοπτρίζει την P_5 στο $I_{pa\text{int}s,exhibited} / \approx_{I_{pa\text{int}s,exhibited}} = \{\{(\&r1, \&r2, \&r3), (\&r1, \&r4, \&r3)\}, \{(\&r9, \&r10, \&r11)\}, \{(\&r14, \&r15, \&r16), bottom(I_{pa\text{int}s,exhibited})\}\}$. Εξαλείφοντας το $bottom(I_{pa\text{int}s,exhibited})$ από την κλάση ισοδυναμίας $\overline{i_3} = \{(\&r14, \&r15, \&r16), bottom(I_{pa\text{int}s,exhibited})\}$, η Εικόνα 5.13 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του $I_{pa\text{int}s,exhibited} / \approx_{I_{pa\text{int}s,exhibited}}$ μέσω της $\leq_{I_{pa\text{int}s,exhibited}/\approx_{I_{pa\text{int}s,exhibited}}}$.



Εικόνα 5.13 - Το διάγραμμα Hasse του $I_{pa\text{int}s,exhibited} / \approx_{I_{pa\text{int}s,exhibited}}$ μέσω της $\leq_{I_{pa\text{int}s,exhibited}/\approx_{I_{pa\text{int}s,exhibited}}}$ για το Παράδειγμα 5.2

Τέλος, η τελική αλληλουχία οθονών που παρουσιάζονται στο χρήστη δημιουργείται με βάση το Θεώρημα 3.4, όπου το σύνολο-αποτέλεσμα F του αλγόριθμου *FinTO* με είσοδο το $I_{pa\,\mathrm{int}\,s,exhibited} / \approx_{I_{pa\,\mathrm{int}\,s,exhibited}}$ είναι το ίδιο *ανεξάρτητα από το ποιός από τους δύο αλγόριθμους TOWMin και TOWMax χρησιμοποιείται* και ίσο με $F = \{\{\{(\&r1, \&r2, \&r3), (\&r1, \&r4, \&r3)\}\}, \{\{(\&r9, \&r10, \&r11)\}\}, \{(\&r14, \&r15, \&r16)\}\}$. Οπότε, και πάλι έχουμε μια εκδοχή του συνόλου *Monitors*, άρα και μια τελική αλληλουχία οθονών αποτελεσμάτων. Η Εικόνα 5.14 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του *Monitors* μέσω της $\leq_O$ που ορίζεται στο Θεώρημα 3.4, το οποίο και αναπαριστά την παραπάνω αλληλουχία. □

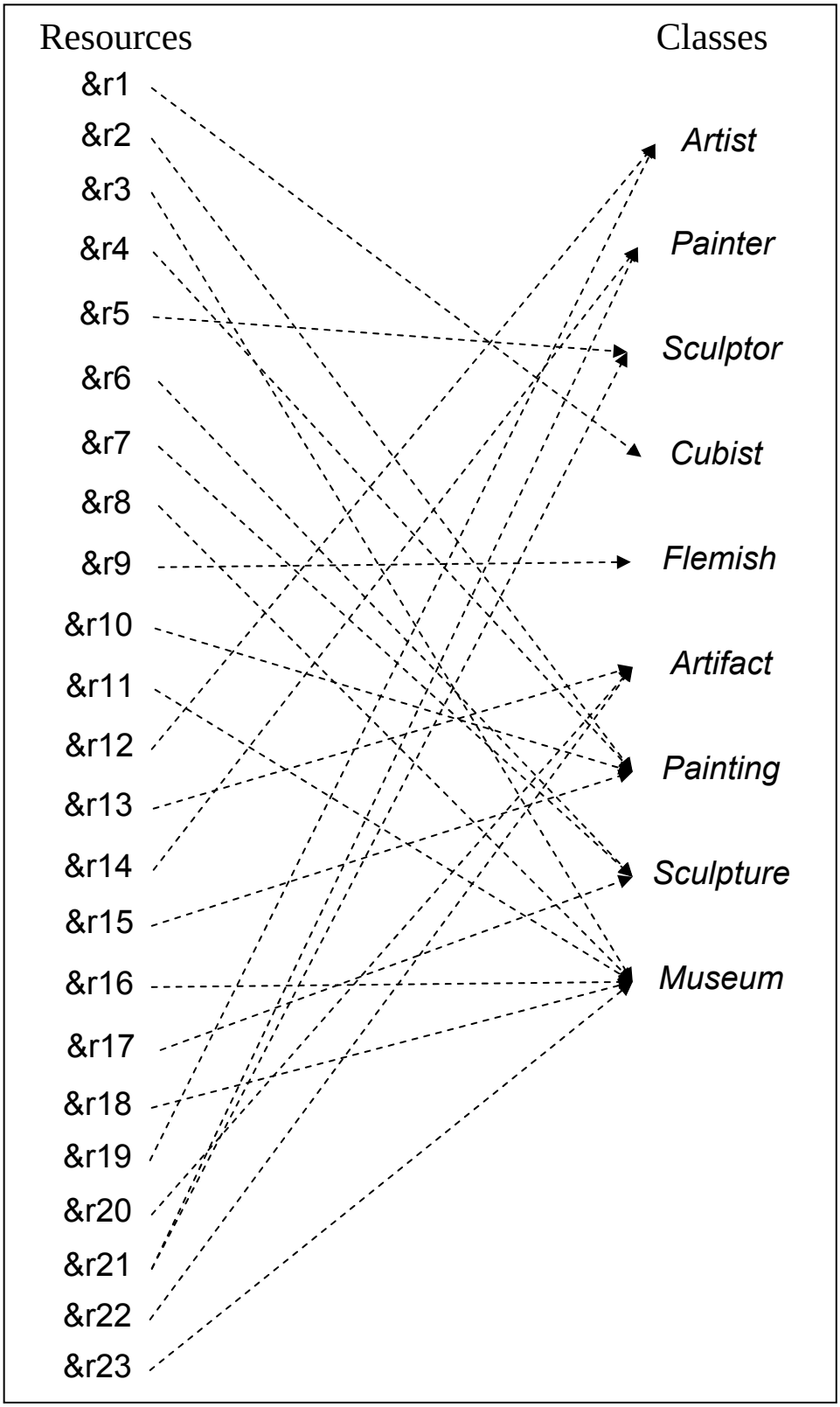


Εικόνα 5.14 - Το διάγραμμα Hasse του *Monitors* μέσω της $\leq_O$ για το Παράδειγμα 5.2

5.2.3 Κατηγοριοποίηση των Πόρων

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, δεδομένου ενός RDF Σχήματος και ενός συγκεκριμένου RDF στιγμιότυπου, η κατηγοριοποίηση (classification) των πόρων/κόμβων του στιγμιότυπου αυτού γίνεται μέσω της RDF ιδιότητας *typeOf*, η οποία και αντιστοιχεί κάθε τέτοιο πόρο στην κλάση/κλάσεις του σχήματος όπου ανήκει. Η Εικόνα 5.15 παρουσιάζει την αντιστοίχηση των πόρων/κόμβων του RDF στιγμιότυπου της Εικόνας 5.2 στις κλάσεις του RDF Σχήματος της Εικόνας 5.1 μέσω της *typeOf*, όπου κάθε στιγμιότυπο της

ιδιότητας αυτής αναπαρίσταται ως διακεκομμένο βέλος που συνδέει τον εκάστοτε πόρο με την αντίστοιχη κλάση/κλάσεις:



Εικόνα 5.15 – Η κατηγοριοποίηση των πόρων/κόμβων του RDF στιγμιότυπου της Εικόνας 5.2 στις κλάσεις του RDF Σχήματος της Εικόνας 5.1 μέσω της *typeOf* ιδιότητας

Με βάση τη φύση της ιδιότητας αυτής, *δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελεί συνάρτηση*, εφόσον *είναι δυνατό ένας πόρος να κατηγοριοποιείται σε δύο ή και παραπάνω κλάσεις του σχήματος*. Π.χ., στην Εικόνα 5.15, ο πόρος $\&r21$ αποτελεί στιγμιότυπο των κλάσεων *Painter και Sculptor*, οπότε αντιστοιχείται, μέσω της *typeOf*, και στις δύο αυτές κλάσεις. Επομένως, και πάλι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συναρτησιακή αναπαράσταση που προτείναμε για τις ιδιότητες/γνωρίσματα των πόρων.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από την Εικόνα 5.15, κάθε βέλος-στιγμιότυπο της *typeOf*, το οποίο και ονομάζεται «σύνδεσμος κατηγοριοποίησης» (classification link), μπορεί να προσδιοριστεί *μοναδικά* από το ζεύγος του πόρου και της κλάσης που συνδέει. Π.χ., ο σύνδεσμος κατηγοριοποίησης $\&r21 \xrightarrow{typeOf} Sculpture$ χαρακτηρίζεται μοναδικά από το ζεύγος $(\&r21, Sculpture)$. Με βάση την παρατήρηση αυτή, τα ζεύγη αυτά μπορούν να αποτελέσουν τα αντίστοιχα *αναγνωριστικά (identifiers)* για τους συνδέσμους αυτούς. Δεδομένου ενός RDF Σχήματος S και ενός έγκυρου RDF στιγμιότυπού του D, το σύνολο των αναγνωριστικών των αντίστοιχων συνδέσμων κατηγοριοποίησης που συνδέουν πόρους/κόμβους του D με κλάσεις του S συμβολίζεται ως $CLinks_{D,S}$. Π.χ., αν S το RDF Σχήμα της Εικόνας 5.1 και D το RDF στιγμιότυπο της Εικόνας 5.2, τότε έχουμε $CLinks_{D,S} = \{ (\&r1, Cubist), (\&r2, Painting), (\&r3, Museum), (\&r4, Painting), (\&r5, Sculptor), (\&r6, Sculpture), (\&r7, Sculpture), (\&r8, Museum), (\&r9, Flemish), (\&r10, Painting), (\&r11, Museum), (\&r12, Artist), (\&r13, Artifact), (\&r14, Painter), (\&r15, Painting), (\&r16, Museum), (\&r17, Sculpture), (\&r18, Museum), (\&r19, Artist), (\&r20, Artifact), (\&r21, Painter), (\&r21, Sculptor), (\&r22, Artifact), (\&r23, Museum)\}$.

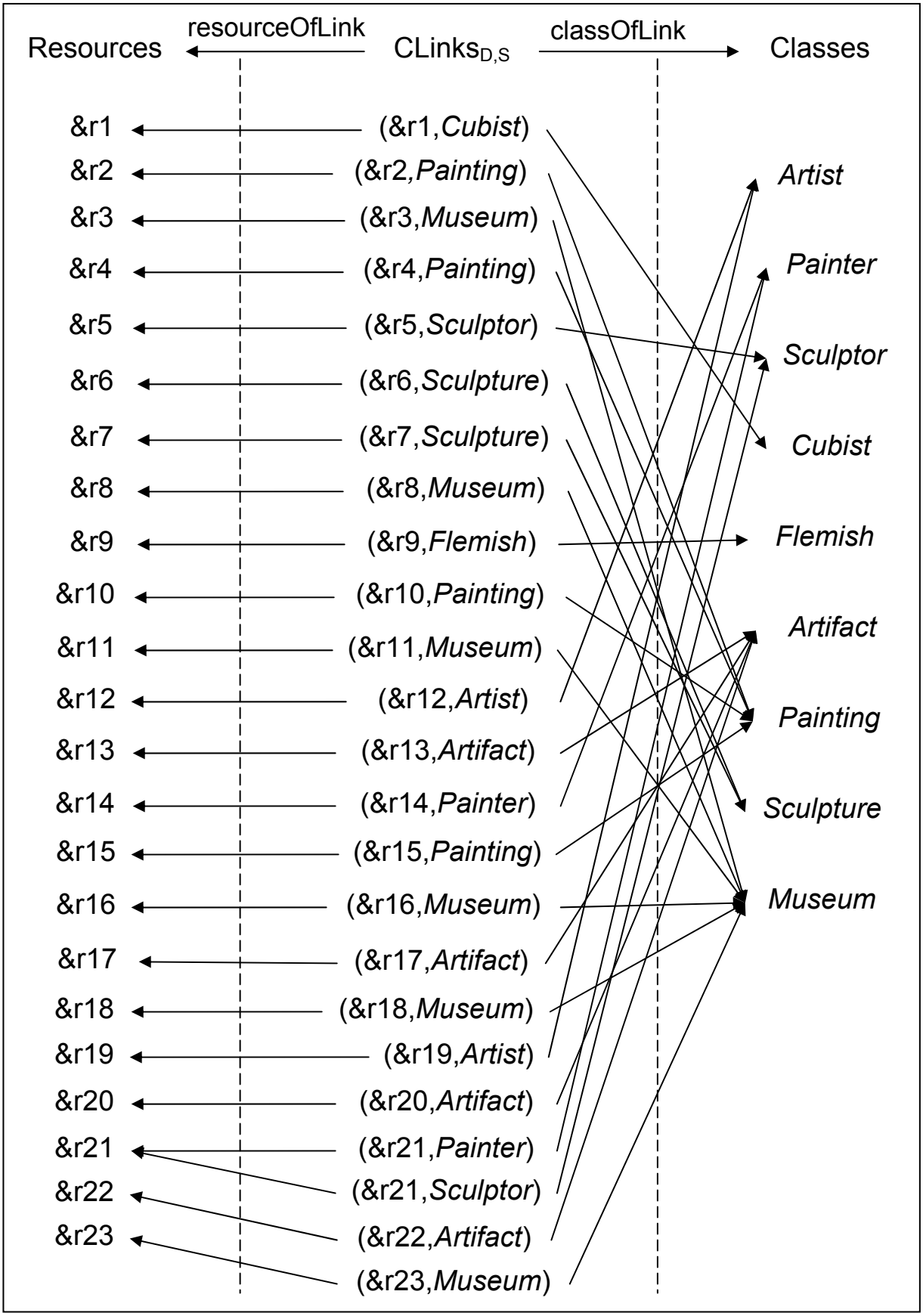
Με βάση τον παραπάνω καθορισμό των αναγνωριστικών των συνδέσμων κατηγοριοποίησης, μπορούμε για το σύνολό τους, $CLinks_{D,S}$, *να ορίσουμε συναρτήσεις που σχετίζουν τα εκάστοτε αναγνωριστικά που περιέχει με τον αντίστοιχο πόρο και την κλάση που συνδέονται μέσω αυτών*. Συγκεκριμένα, έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 5.3: *Έστω RDF Σχήμα* S, D *ένα έγκυρο στιγμιότυπό του και έστω* $CLinks_{D,S}$ *το σύνολο των αναγνωριστικών των συνδέσμων κατηγοριοποίησης (classification links), μέσω της ιδιότητας typeOf, από τους πόρους/κόμβους του* D *στις κλάσεις του* S. *Τότε :*

a) Η συνάρτηση $classOfLink : CLinks_{D,S} \to Classes$, *όπου* $Classes$ *το σύνολο των κλάσεων του* S, *για την οποία* $\forall(\&rX, c) \in CLinks_{D,S}$, $classOfLink(\&rX, c) = c$, *αποτελεί τη συνάρτηση κλάσης (class function) του* $CLinks_{D,S}$.

b) Η συνάρτηση $resourceOfLink : CLinks_{D,S} \to \mathrm{Re}\,sources$, *όπου* $\mathrm{Re}\,sources$ *το σύνολο των πόρων/κόμβων του* D, *για την οποία* $\forall(\&rX, c) \in CLinks_{D,S}$, $resourceOfLink(\&rX, c) = \&rX$, *αποτελεί τη συνάρτηση πόρου (resource function) του* $CLinks_{D,S}$.□

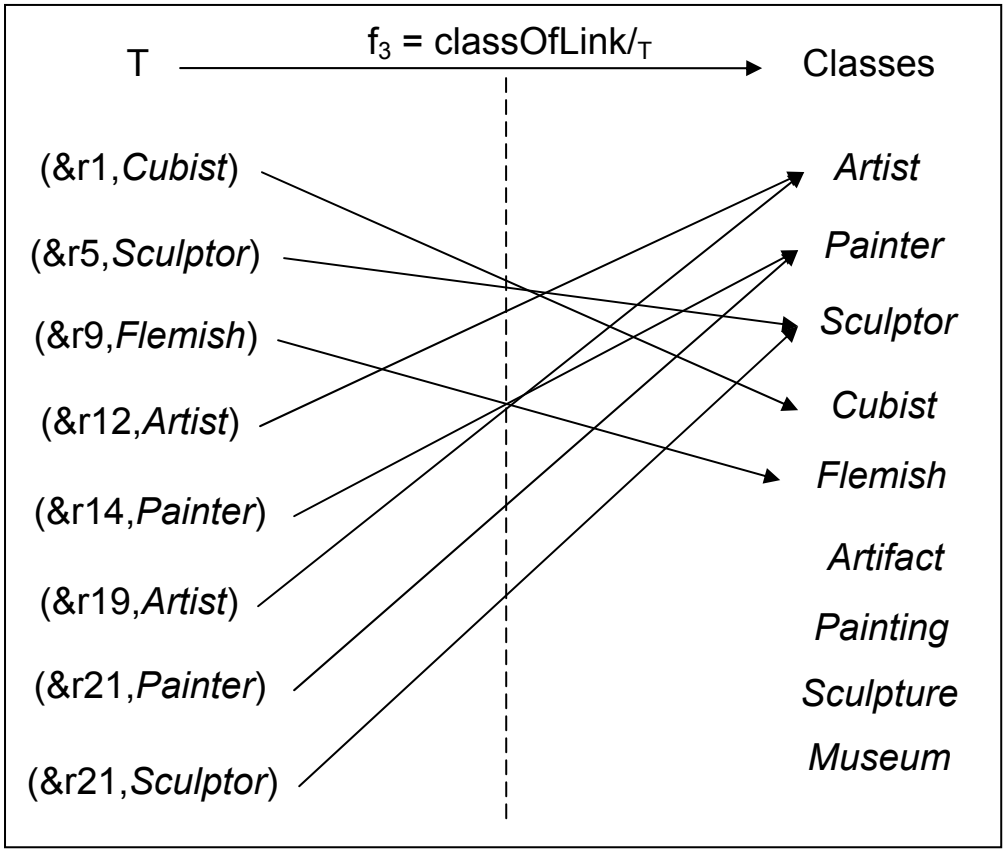
Για μια καλύτερη εποπτεία των συναρτήσεων αυτών, η Εικόνα 5.16 παρουσιάζει την απεικόνιση των $classOfLink : CLinks_{D,S} \to Classes$ και $resourceOfLink : CLinks_{D,S} \to \mathrm{Re}\,sources$ για το RDF Σχήμα στην Εικόνα 5.1 και το RDF στιγμιότυπο στην Εικόνα 5.2, όπου $Classes = \{Artist, Pa\,\mathrm{int}\,er, Sculptor, Cubist, Flemish, Artifact, Pa\,\mathrm{int}\,ing, Sculpture, Museum\}$ και $\mathrm{Re}\,sources = \{\&r1,...,\&r23\}$.



Εικόνα 5.16 - Οι συναρτήσεις $classOfLink : CLinks_{D,S} \rightarrow Classes$ **και** $resourceOfLink : CLinks_{D,S} \rightarrow \text{Re}\, sources$

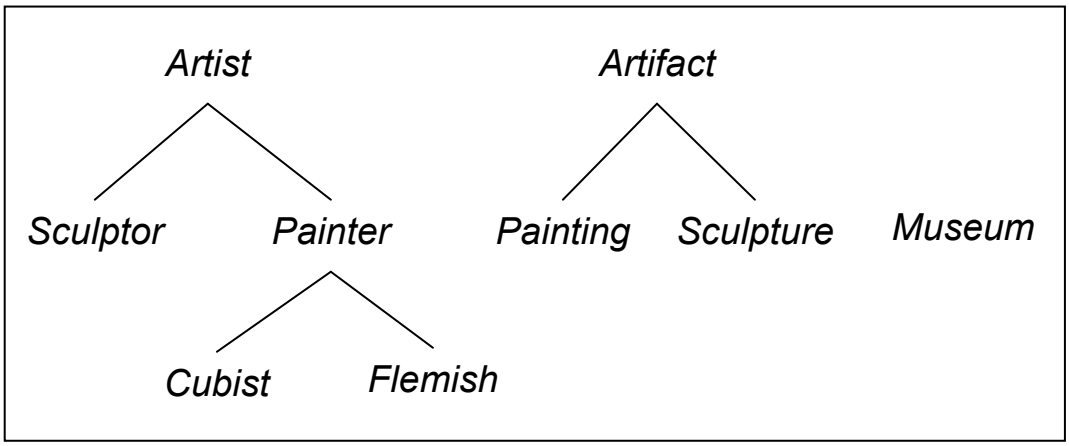
Μέσω των παραπάνω συναρτήσεων (ιδιαίτερα της $classOfLink$), είναι δυνατή η δήλωση προτιμήσεων πάνω στους συνδέσμους κατηγοριοποίησης που προσδιορίζουν ένα συγκεκριμένο RDF Σχήμα και ένα έγκυρο στιγμιότυπό του, *με βάση τις πιθανές ISA σχέσεις των κλάσεων στο σχήμα, όπου και το σύνολο των σχέσεων αυτών αποτελεί μερική διάταξη*. Για να γίνει αυτό πιο αντιληπτό, παρακάτω παραθέτουμε ένα απλό παράδειγμα τέτοιας προτίμησης:

Παράδειγμα 5.3: Έστω S το RDF Σχήμα της Εικόνας 5.1 και D το στιγμιότυπό του στην Εικόνα 5.2. Έστω, τώρα, ότι ένας χρήστης δηλώνει την παρακάτω προτίμηση πάνω στους συνδέσμους κατηγοριοποίησης πόρων του D με κλάσεις του S που ανήκουν στην ISA ιεραρχία της κλάσης *Artist*: *«Από τους συνδέσμους κατηγοριοποίησης που σχετίζουν πόρους με κλάσεις που ανήκουν στην ISA ιεραρχία της κλάσης Artist, προτιμώ αυτούς των οποίων η αντίστοιχη κλάση είναι όσο το δυνατόν γενικότερη»*. Μεταφράζοντας την παραπάνω δήλωση στο δικό μας πλαίσιο, πρόκειται για μια προτίμηση $P_6 = (Classes, \leq_{P_6})$ πάνω στο σύνολο των αναγνωριστικών συνδέσμων κατηγοριοποίησης T = $\{(\&r1, Cubist)$, $(\&r5, Sculptor)$, $(\&r9, Flemish)$, $(\&r12, Artist)$, $(\&r14, Pa\,\mathrm{int}\,er)$, $(\&r19, Artist)$, $(\&r21, Pa\,\mathrm{int}\,er)$, $(\&r21, Sculptor)\} \subset CLinks_{D,S}$ με εμπλεκόμενη συνάρτηση την $f_3 : T \to Classes$, (όπου $Classes$ το σύνολο των κλάσεων του S) η οποία και αποτελεί το συναρτησιακό περιορισμό (Ορισμός 3.6) της $classOfLink : CLinks_{D,S} \to Classes$ (Εικόνα 5.16) πάνω στο $CLinks_{D,S}$ από το T ($f_3 = classOfLink /_T$). Για μια καλύτερη εποπτεία της f_3, η Εικόνα 5.17 παρουσιάζει τη σχηματική της αναπαράσταση:



Εικόνα 5.17 - Η σχηματική αναπαράσταση της $f_3 : T \to Classes$ **, όπου** $f_3 = classOfLink/_T$

Εφόσον ο χρήστης προτιμά όσο το δυνατόν *γενικότερες* κλάσεις, για την μερική διάταξη $\leq_{P_6}$ που αναπαριστά την προτίμηση P_6 στο σύνολο $Classes$ των κλάσεων του S, έχουμε ότι $\forall c, c' \in Classes$ με $c \neq c'$, $c \leq_{P_6} c'$ αν η κλάση c αποτελεί υποκλάση (subclassOf) της c'. Η Εικόνα 5.18 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του συνόλου $Classes$ μέσω της $\leq_{P_6}$:



Εικόνα 5.18 - Το διάγραμμα Hasse του συνόλου $Classes$ **μέσω της** $\leq_{P_6}$

Έχοντας, πλέον, καθορίσει τη μερική διάταξη $\leq_{P_6}$, η διάταξη των αναγνωριστικών συνδέσμων κατηγοριοποίησης του T με βάση την $\leq_{P_6}$ γίνεται μέσω του Θεωρήματος 3.1. Όπως βλέπουμε από την Εικόνα 5.18, $range(f_3)$ = $\{Artist, Sculptor, Pa\text{int}er, Cubist, Flemish\}$, άρα το T διαμερίζεται, μέσω της f_3^{-1}, στις αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας:

$\bar{l}_1 = f_3^{-1}(Artist) = \{(\&r12, Artist), (\&r19, Artist)\}$,

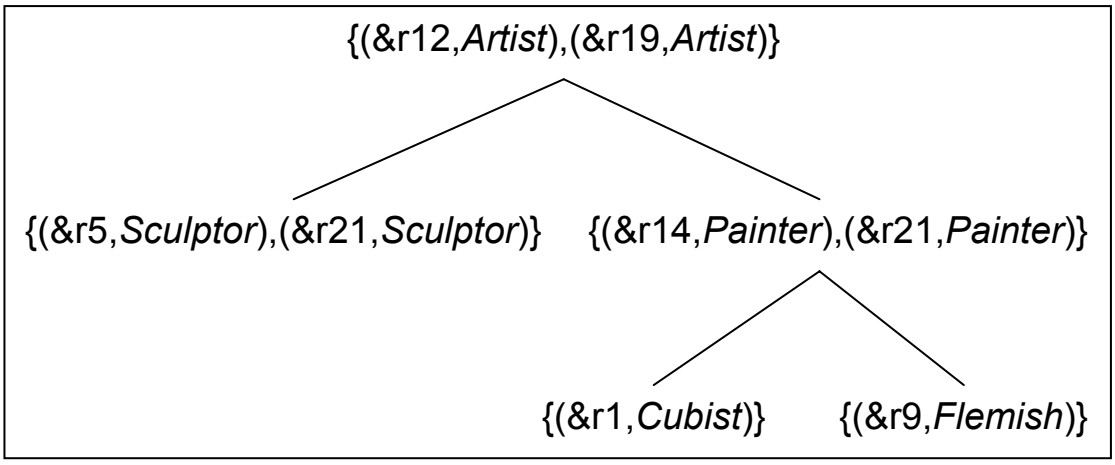
$\bar{l}_2 = f_3^{-1}(Sculptor) = \{(\&r5, Sculptor), (\&r21, Sculptor)\}$,

$\bar{l}_3 = f_3^{-1}(Pa\text{int}er) = \{(\&r14, Pa\text{int}er), (\&r21, Pa\text{int}er)\}$,

$\bar{l}_4 = f_3^{-1}(Cubist) = \{(\&r1, Cubist)\}$, και

$\bar{l}_5 = f_3^{-1}(Flemish) = \{(\&r9, Flemish)\}$

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενα παραδείγματα, η διάταξη των παραπάνω κλάσεων ισοδυναμίας γίνεται μέσω της διάταξης των αντίστοιχων εικόνων τους στο $range(f_3)$ με βάση την $\leq_{P_6}$. Οπότε, με βάση το διάγραμμα Hasse του συνόλου $Classes$ μέσω της $\leq_{P_6}$ στην Εικόνα 5.18, έχουμε ότι $\bar{l}_2 \leq_{T/\approx_T} \bar{l}_1$, $\bar{l}_3 \leq_{T/\approx_T} \bar{l}_1$, $\bar{l}_4 \leq_{T/\approx_T} \bar{l}_1$, $\bar{l}_5 \leq_{T/\approx_T} \bar{l}_1$, $\bar{l}_4 \leq_{T/\approx_T} \bar{l}_3$ και $\bar{l}_5 \leq_{T/\approx_T} \bar{l}_3$, όπου $\leq_{T/\approx_T}$ η μερική διάταξη που αντικατοπτρίζει την P_6 στο $T/\approx_T$ = $\{\{(\&r12, Artist), (\&r19, Artist)\}, \{(\&r5, Sculptor), (\&r21, Sculptor)\}, \{(\&r14, Pa\text{int}er), (\&r21, Pa\text{int}er)\}, \{(\&r1, Cubist)\}, \{(\&r9, Flemish)\}\}$. Η Εικόνα 5.19 παρουσιάζει το διάγραμμα Hasse του $T/\approx_T$ μέσω της $\leq_{T/\approx_T}$.



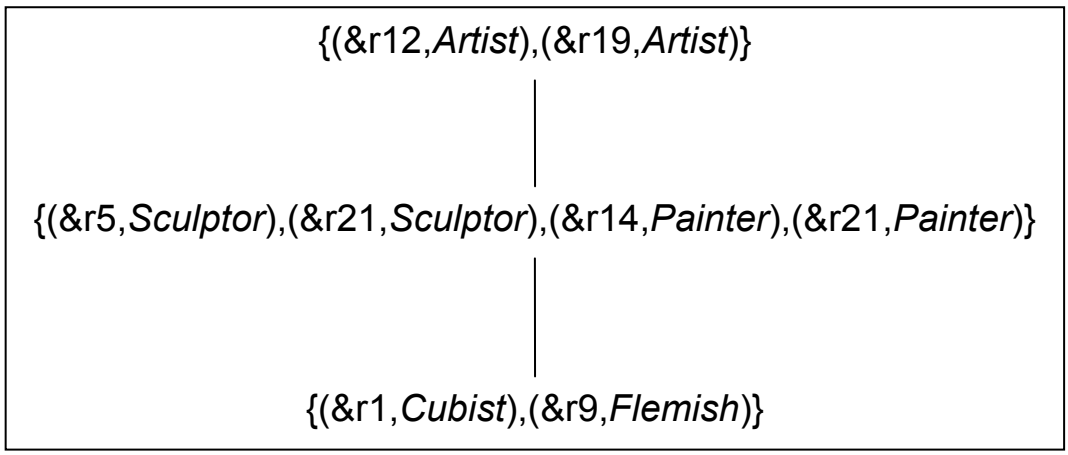
Εικόνα 5.19 - Το διάγραμμα Hasse του $T/\approx_T$ μέσω της $\leq_{T/\approx_T}$ για το Παράδειγμα 5.3

Μέσω της παραπάνω διάταξης του $T / \approx_T$, η τελική αλληλουχία οθονών που παρουσιάζονται στο χρήστη δημιουργείται με βάση το Θεώρημα 3.4. Σ' αυτήν εδώ την περίπτωση, έχουμε δύο πιθανές εκδοχές του συνόλου-αποτελέσματος $F = \{F_1, F_2, F_3\}$ του αλγόριθμου *FinTO* με είσοδο το $T / \approx_T$:

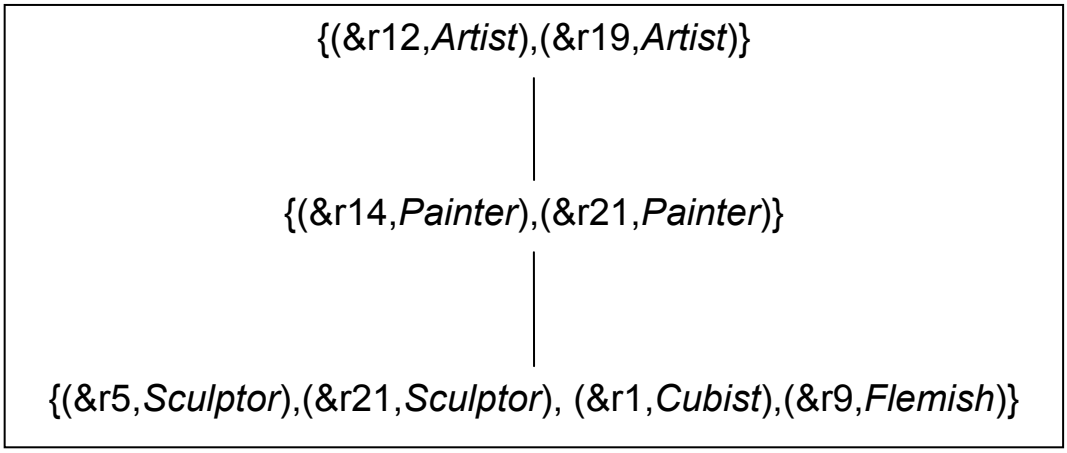
a) Αν χρησιμοποιείται ο *TOWMax για την ολική διάταξη των ενεργών στοιχείων*, τότε $F_1 = \{\{(\&r12, Artist), (\&r19, Artist)\}\}$, $F_2 = \{\{(\&r5, Sculptor), (\&r21, Sculptor)\}, \{(\&r14, Painter), (\&r21, Painter)\}\}$ και $F_3 = \{\{(\&r1, Cubist)\}, \{(\&r9, Flemish)\}\}$

b) Αν χρησιμοποιείται ο *TOWMin για την ολική διάταξη των ενεργών στοιχείων*, τότε $F_1 = \{\{(\&r12, Artist), (\&r19, Artist)\}\}$, $F_2 = \{\{(\&r14, Painter), (\&r21, Painter)\}\}$ και $F_3 = \{\{(\&r5, Sculptor), (\&r21, Sculptor)\}, \{(\&r1, Cubist)\}, \{(\&r9, Flemish)\}\}$.

Έτσι, έχουμε δύο τελικές εκδοχές του συνόλου *Monitors*, οπότε και δύο τελικές αλληλουχίες οθονών αποτελεσμάτων. Οι Εικόνες 5.20 και 5.21 παρουσιάζουν τα διαγράμματα Hasse του *Monitors* μέσω της $\leq_O$ που ορίζεται στο Θεώρημα 3.4, τα οποία και αναπαριστούν τις αλληλουχίες αυτές. □



Εικόνα 5.20 - Το διάγραμμα Hasse του *Monitors* μέσω της $\leq_O$ για το Παράδειγμα 5.3 (επιλογή *TOWMax*)



Εικόνα 5.21 - Το διάγραμμα Hasse του $Monitors$ **μέσω της** $\leq_O$ **για το Παράδειγμα 5.3 (επιλογή *TOWMin*)**

Κεφάλαιο 6

Επίλογος και Μελλοντική Εργασία

Η ανάγκη της ελεγχόμενης «χαλάρωσης» επερωτήσεων για την αποφυγή των αποθαρρυντικών προβλημάτων της κενής απάντησης και της υπερχείλισης πληροφορίας, μας οδήγησε στην εισαγωγή *των προτιμήσεων* του χρήστη στις επερωτήσεις, εγείροντας, έτσι, την πρόκληση της ανάπτυξης ενός *επαρκούς* μοντέλου αναπαράστασης των προτιμήσεων αυτών στα εκάστοτε μοντέλα δεδομένων του Παγκόσμιου Ιστού. Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, προτείνουμε ένα τέτοιο μοντέλο αναπαράστασης, του οποίου η συμβολή σε σχέση με τις αντίστοιχες υπάρχουσες προσεγγίσεις επικεντρώνεται στα παρακάτω βασικά χαρακτηριστικά:

a) Το μοντέλο μας είναι *απλό* και επιτρέπει την εφαρμογή του σε συλλογές δεδομένων *διαφορετικού* τύπου, όπως, π.χ., στο σχεσιακό και στο RDF μοντέλο δεδομένων, σε αντίθεση με τις υπόλοιπες προσεγγίσεις που εξειδικεύονται σε *συγκεκριμένα* μοντέλα δεδομένων.

b) Η έννοια της προδιάταξης, όπου και βασίζεται το μοντέλο μας για την αναπαράσταση της τελικής διάταξης των αντικειμένων, αντικατοπτρίζει *πληρέστερα* τη συσχέτισή τους με βάση τη δηλωμένη προτίμηση απ' ότι ο *μη-ορισμός* συγκεκριμένης διάταξης στον Chomicki και η αυστηρή μερική διάταξη στον Kießling.

c) Το μοντέλο μας είναι *ελάχιστο*, εφόσον, σε αντιδιαστολή με τις άλλες ερευνητικές εργασίες, *δεν στηρίζεται σε πλεονάζοντες ορισμούς* για την αναπαράσταση των προτιμήσεων.

d) Μέσω της ευελιξίας που χαρακτηρίζει το μοντέλο μας, είναι δυνατή η έκφραση προτιμήσεων *και στο επίπεδο των χαρακτηριστικών των αντικειμένων*, των οποίων η παραγόμενη διάταξη ξεπερνά τα «στένα» όρια της ολικής διάταξης που χαρακτηρίζει τις άλλες προσεγγίσεις στο επίπεδο αυτό.

e) Σε αντιπαράθεση με το σύνολο των σχετικών προσεγγίσεων, το μοντέλο μας επιτρέπει την έκφραση προτιμήσεων *και πάνω σε*

μονοπάτια, γεγονός πολύ σημαντικό για την αναπαράστασή τους σε μοντέλα δεδομένων του Σημασιολογικού Ιστού (π.χ., ημιδομημένο, RDF)

f) Στην έκφραση σύνθετων προτιμήσεων, το μόντελο μας *δεν επιβάλλει περιορισμούς* πάνω στις προτιμήσεις που συντίθενται, σε αντίθεση με τα αντίστοιχα πλαίσια των σχετικών ερευνητικών εργασιών.

Όπως βλέπουμε, το μοντέλο μας είναι αρκετά γενικευμένο και αποτελεί μια ικανοποιητική λύση για τη θεμελίωση και αναπαράσταση των προτιμήσεων στον χαοτικό και ετερογενή κόσμο της πληροφορίας του Παγκόσμιου Ιστού. Ωστόσο, επιδέχεται κι ενός συνόλου από βελτιώσεις και επεκτάσεις που θα το καταστήσουν ακόμα πιο αξιόλογο.

Μια από τις άμεσες προτεραιότητές μας είναι η μελέτη για τις απαιτήσεις μνήμης του μοντέλου. Πιο συγκεκριμένα, είναι απαραίτητη η εξέταση του χώρου που χρειάζεται να δεσμεύσουμε για κάθε διάταξη που επιτελείται σε ένα σύνολο αντικειμένων μέσω μιας δηλωμένης προτίμησης, καθώς και η αξίωση σε χώρο και χρόνο της κάθε εκτέλεσης των αλγορίθμων που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 3 (*TOWMax*, *TOWMin*, *FinTO*).

Επίσης, αρκετά ενδιαφέρουσα επέκταση πάνω στο μοντέλο μας αποτελεί η μελέτη για την επιστροφή στο χρήστη των *top-k* αποτελεσμάτων με βάση μια δηλωμένη προτίμηση του χρήστη. Αυτή η τεχνική βελτιστοποίησης είναι, πλέον, αρκετά διαδεδομένη στο χώρο των βάσεων δεδομένων, καθώς και στις μηχανές αναζήτησης του Παγκόσμιου Ιστού.

Μια ακόμα σημαντική συνισταμένη που θα μπορούσε να αποτελέσει απαρχή για μελλοντική εργασία είναι η εφαρμογή του μοντέλου μας για την επέκταση ήδη υπαρχόντων δηλωτικών γλωσσών επερωτήσεων, όπως είναι, π.χ., η SQL για το σχεσιακό μοντέλο δεδομένων και η RQL ([15], [30]) για το RDF μοντέλο δεδομένων. Σημαντικό μέλημα στην προσπάθεια αυτή, παίζει η κατάλληλη προσαρμογή του μοντέλου στη δομή και σημασιολογία της κάθε γλώσσας, έτσι ώστε οι αντίστοιχες επεκτάσεις να καλύπτουν επαρκώς όσο το δυνατό περισσότερες εκφράσεις προτιμήσεων.

Τέλος, μια ακόμα άμεση και αξιόλογη βελτίωση του μοντέλου μας αποτελεί η περαιτέρω επέκτασή του πάνω στο RDF μοντέλο δεδομένων, για τη δυνατότητα έκφρασης προτιμήσεων πάνω *και σε άλλα χαρακτηριστικά* που

προσδιορίζουν αυτό το μοντέλο δεδομένων, όπως είναι, π.χ., το μήκος των μονοπατιών, καθώς και για τον καθορισμό διατάξεων μέσω προτιμήσεων μεταξύ αντικειμένων που *δεν* χαρακτηρίζονται από παρόμοια πληροφορία, όπως, π.χ., είναι τα μονοπάτια που *δεν* έχουν την ίδια ακολουθία ιδιοτήτων.

Βιβλιογραφία

[1] Agrawal R., Wimmers E.L.: *A Framework for Expressing and Combining Preferences*. Proc. ACM SIGMOD, Dallas, May 2000, pp. 297 - 306.

[2] Andreka H., Ryan M., Schobbens P.-Y.: *Operators and Laws for Combining Preference Relations*. Journal of Logic and Computation, 12, 1, 2002, pp. 13 - 53.

[3] Atallah M.J.: *Algorithms and Theory of Computation Handbook (1st Edition)*. CRC-Press, November 1998, ISBN: 0849326494

[4] Berners-Lee T., Fielding R., Masinter L.: *Uniform Resource Identifier (URI): Generic Syntax*. RFC 2396, 1998. Available at http://www.ietf.org/rfc/rfc2396.txt

[5] Börzsönyi S., Kossman D., Stocker K.: *The Skyline Operator*. Proc. 17th Intern. Conference on Data Engineering (ICDE), Heidelberg, April 2001.

[6] Brickley D., Guha R.V.: *Resource Description Framework (RDF/S) Schema Specification 1.0*. W3C Candidate Recommendation, 2000

[7] Chomicki J.: *Preference Formulas in Relational Queries.* ACM Transactions on Database Systems, Vol. 28. No. 4, December 2003, pp. 1 - 39.

[8] Chomicki J.: *Querying with Intrinsic Preferences.* Proc. 8th Intern. Conference on Advances in Database Technology (EDBT), Prague, March 2002, pp. 34 - 51.

[9] Davey B.A., Priestley H.A.: *Introduction to Lattices and Order (2nd Edition)*. Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, 2001.

[10] Fishburn P.C.: *Preference Structures and their Numerical Representations*. Journal of Theoretical Computer, 217, 1999, pp. 359 – 383.

[11] Fishburn P.C.: *Utility theory for decision making*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1970.

[12] Foustoucos E., Kazem Lellahi S., Spyratos N.: *An Algebraic semantics for Datalog*. IVèmes Journées Francophones de Programmation en Logique & Journée d'étude Programmation par Contraintes et

applications industrielles (JFPLC), Dijon, France, May 1995, pp. 225 - 239.

[13] Goodrich M. T., Tamassia R.: *Algorithm Design: Foundations, Analysis and Internet Examples*. John Wiley & Sons Inc., New York, 2002, ISBN: 0-471-38365-1

[14] Hristidis V., Koudas N., Papakonstantinou Y.: *PREFER: A System for the Efficient Execution of Multiparametric Ranked Queries*. Proc. ACM SIGMOD, Santa Barbara, USA, May 2001, pp. 259 - 269.

[15] Karvounarakis G., Magkanaraki A., Alexaki S., Christophides V., Plexousakis D., Scholl M., Tolle K.: *Querying the Semantic Web with RQL*. Computer Networks and ISDN Systems Journal, Vol. 42(5), 2003, pp. 617 - 640.

[16] Kazem Lellahi S., Souah R., Spyratos N.: *An Algebraic Query Language for Object-Oriented Data Models*. Proc. 8th Intern. Conference on Database and Expert Systems Applications (DEXA), Toulouse, France, September 1997, pp. 519 – 528.

[17] Kazem Lellahi S., Spyratos N.: *Towards a Categorial Data Model Supporting Structured Objects and Inheritance*. Proc. 1st Intern. East/West Database Workshop (EWDW), Kiev, October 1990, pp. 86 - 105.

[18] Kazem Lellahi S., Spyratos N., Thiam M.: *Object Functional Dependencies and the Semantics of Class Extensions*. 12èmes Journées Bases de Données Avancées (BDA), Cassis, France, 1996, pp. 99 – 118.

[19] Kießling W.: *Foundations of Preferences in Database Systems.* Proc. 28th Intern. Conference on Very Large Data Bases (VLDB), Hong Kong, China, 2002, pp. 311 - 322.

[20] Kießling W., Hafenrichter B., Fischer S., Holland S.: *Preference XPATH: A Query Language for E-Commerce.* Proc. 5th Intern. Conference on Wirtschaftsinformatik, Ausburg, Germany, 2001, pp. 427 - 440.

[21] Kießling W., Köstler G.: *Preference SQL – Design, Implementation, Experiences.* Proc. 28th Intern. Conference on Very Large Data Bases (VLDB), Hong Kong, China, 2002, pp. 990 - 1001.

[22] Klyne G., Carroll J.J.: *Resource Description Framework (RDF): Concepts and Abstract Syntax*. W3C Recommendation, 2004.

[23] Koutrika G., Ioannidis Y.: *Personalization of Queries in Database Systems.* Proc. 20th Intern. Conference on Data Engineering (ICDE), Boston, USA, March 30 – April 2, 2004.

[24] Lacroix M., Lavency P.: *Preferences: Putting More Knowledge Into Queries*. Proc. 13th Intern. Conference on Very Large Data Bases (VLDB), Brighton, England, 1987, pp. 217 - 225.

[25] Lassila O., Swick R.: *Resource Description Framework (RDF) Model and Syntax Specification*. W3C Recommendation, 1999.

[26] Mehlhorn K., Näher S.: *LEDA : A Platform for Combinatorial and Geometric Computing*. Cambridge University Press, November 1999, ISBN: 0521563291

[27] Skiena S.S.: *The Algorithm Design Manual*. Telos Publishing, November 1997, ISBN: 0387948600

[28] Spyratos N.: *The Partition Model: A Functional Approach.* INRIA Research Report No 430, July 1985

[29] Spyratos N.: *A Functional Model for Dimensional Data Analysis*. Research Report LRI, June 2005, to appear

[30] The ICS-FORTH RDFSuite, http://139.91.183.30:9090/RDF/